Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie

Josef Schicho, JKU, RISC

December 13, 2023

Trivialbeispiele

Beispiel 1: X beliebig, $k = 0$. Hier ist Z^0 erzeugt von X, $\mathrm{Rat}^k(X)$ ist $\{0\}$, und $A^0(X) = Z^0(X) \cong \mathbb{Z}$.

Beispiel 2: $X = \mathbb{A}^n$, $k > 0$. Es sei $Y \subset X$ eine Untervarietät von Kodimension k; wir nehmen oBdA an, dass $0 \notin Y$. Wir definieren

$$U = \{(x, t) \mid tx \in Y\}$$

Dann gilt $U_1 = Y$ und $U_0 = 0$. Also ist $\mathrm{Rat}^k(X) = Z^k(X)$ und $A^k(X) = 0$.

Interessantere Beispiele

Beispiel 3: $X = \mathbb{P}^n$, $k = 1$. Es sei $d > 0$. Jedes homogene Polynom von Grad d hat einen Null-Zykel (F); wenn $F = F_1^{m_1} \cdot F_r^{m_r}$ die Faktorisierung in irreduzible Faktoren ist, dann ist

$$(F) = m_1 Z(F_1) + \cdots + m_r Z(F_r),$$

wobei $Z(F_i)$ die Nullstellenmenge von F_i ist. Jeder Zykel in $Z^1(X)$ ist gleich (F) für irgendein Polynom F.

Wenn U eine Familie von Zykeln in Z^1 ist, dann sind alle Zykel U_t durch ein Polynom definiert, dessen Grad unabhängig von t ist. Umgekehrt gibt es für zwei Zykel (F_1) und (F_2) mit $\deg(F_1) = \deg(F_2)$ eine Familie mit $U_0 = (F_1)$ und $U_1 = (F_2)$ (man konstruiere sie!)

Interessantere Beispiele

Beispiel 4: $X = \mathbb{P}^n$, $k > 1$. Es sei $Y \subset X$ mit $\mathrm{codim}(Y) = k$. ObdA nehmen wir an, dass $(0 : \cdots : 0 : 1)$ nicht in Y liegt.

Die Familie

$$U_t = \{(x_0 : \cdots : x_{n-1} : tx_n) \mid (x_0 : \cdots : x_{n-1} : x_n) \in Y, t \in \mathbb{C}\}$$

zeigt, dass Y equivalent zu seinem Bild der Projektion in die Hyperebene $x_n = 0$ ist. Diese Projektion kann mit einem Zykel in $Z^{k-1}(\mathbb{P}^{n-1})$ identifiziert werden.

Frage: Gibt es einen Zusammenhang zwischen dem Grad von Y und dem Grad seiner Projektion?

Durch Induktion nach k kann man zeigen, dass zwei Zykel in Z^k equivalent sind, wenn sie den gleichen Grad haben.
Die Umkehrung gilt auch, wie wir später noch zeigen werden.

Der Chow-Ring von $\mathbb{P}^n$

Die Equivalenzklasse eines Zykels $A \in Z^k(\mathbb{P}^n)$ ist durch seinen Grad eindeutig bestimmt. Der Grad ist ausserdem additiv für Zykel, i.e., $\deg(A + B) = \deg(A) + \deg(B)$. Also gilt $[A] = \deg(A)\zeta_k$, wobei ζ_k die Klasse eines linearen Unterraums von Kodimension k ist.

Der Satz von Bezout ist dann equivalent zu

$$[A] = a\zeta_k, [B] = b\zeta_l \implies [A \cap B] = ab\zeta_{k+l}$$

(wenn $A \cap B \in Z^{k+l}$ gilt und wenn mt den Vielfachheiten alles okay ist).

Multiplikation im Chow-Ring von $\mathbb{P}^n$

Wir können eine Multiplikation $\cdot : A^k \times A^l \to A^{k+l}$ definieren, die distributiv ist. Es reicht, $\zeta_k \cdot \zeta_l := \zeta_{k+l}$ zu setzen für $k + l \leq n$.

Ein graduierter Ring ist ein Ring $(R, +, \cdot)$, sodass $(R, +)$ eine direkte Summe abelscher Gruppen $R = R_0 \oplus R_1 \oplus \dots$ ist, und $R_i \cdot R_j \subset R_{i+j}$ gilt.

Beispiel: Polynomring $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$.

Unsere Chow-Gruppen können wir zu einem graduierten Ring zusammensetzen:

$$A^\bullet(\mathbb{P}^n) = A^0(\mathbb{P}^n) \oplus A^1(\mathbb{P}^n) \oplus \cdots \oplus A^n(\mathbb{P}^n),$$

$$A^k(\mathbb{P}^n) = \langle \zeta^k \rangle_{\mathbb{Z}}$$

für $k = 1, \dots, n$.

Erzeuger und Relationen

Das Einselement ist $\zeta^0 = [X]$. Der Ring ist erzeugt von ζ und daher ein Quotientenring von $\mathbb{Z}[T]$.

Das Ideal besteht aus allen Polynomen $P \in \mathbb{Z}[T]$, für die $P(\zeta) = 0$ ist. In diesem Fall das Ideal gleich $\langle T^{n+1} \rangle$, und daher

$$A^\bullet(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}[T]/\langle T^{n+1} \rangle$$

Transversale Schnitte

Es sei X eine glatte Varietät, $Y_1, Y_2 \subset X$ Untervarietäten, und $p \in Y_1 \cap Y_2$. Wir sagen Y_1 und Y_2 schneiden einander *im Punkt p transversal*, wenn

- p glatter Punkt von Y_1 und von Y_2 ist,
- p auf genau einer Komponente Z von $Y_1 \cap Y_2$ ist,
- $\mathrm{codim}(Z) = \mathrm{codim}(Y_1) + \mathrm{codim}(Y_2)$ gilt (es folgt $\mathrm{codim}(Y_1) + \mathrm{codim}(Y_2) \leq \dim(X)$),
- p glatter Punkt von Z ist.

Y_1 und Y_2 schneiden *generisch transversal* wenn

- $\mathrm{codim}(Y_1 \cap Y_2) = \mathrm{codim}(Y_1) + \mathrm{codim}(Y_2)$ oder $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$,
- in jedem generischen Punkt von $Y_1 \cap Y_2$ schneiden Y_1 und Y_2 transversal.

Beispiele

Beispiel 1: Lineare Teilräume W_1, W_2 eines Vektorraums V schneiden transversal wenn $W_1 + W_2 = V$ gilt.

Beispiel 2: Zwei Hyperflächen schneiden einander transversal in p, wenn die Gradienten der Gelcihungen linear unabhängig sind.

Beispiel 3: X selbst schneidet Y transversal im Punkt p genau dann wenn p glatter Punkt von Y ist.
Daraus folgt: X schneidet jede Untervarietät generisch transversal.

Transversalität von Zyklen

Es sei X eine glatte Varietät, $A = a_1 V_1 + \cdots + a_r V_r \in Z^k(X)$, $B = b_1 W_1 + \cdots + b_s W_s \in \mathbb{Z}^l(X)$. Wir sagen
"A und B schneiden generisch transversal"
wenn für alle $i = 1, \ldots, r$ und $j = 1, \ldots, s$ die Varietäten V_i und W_j generisch transversal schneiden.

In diesem Fall definieren wir den Schnitt-Zykel $A \cap B$ als $\sum_{ij} a_i b_j (V_i \cap W_j)$.

Das Moving Lemma

Moving Lemma: Es sei X eine glatte Varietät, A und B Zyklen. Dann existiert $A' \sim A$ (modulo $\mathrm{Rat}^\bullet$), sodass A' und B generisch transversal schneiden.

Im Buch [EiHa] stehen zwei Beweise, ein konstruktiver für den Fall $X = \mathbb{P}^n$ (Theorem 1.7 auf Seite 19) und einer den ich noch nicht genau durchgelesen habe (Lemma A.1 auf Seite 511).

Moving mit Automorphismen

Die projektive Gruppe $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n)$ ist definiert als die Gruppe der nichtsingulären Matrizen in $C^{(n+1)\times(n+1)}$, modulo Skalarmultiplikation (sie hat Dimension $(n+1)^2 - 1$). Sie wirkt *transitiv* auf $\mathbb{P}^n$, d.h., jeder Punkt kann in jeden Punkt transformiert werden.

Die projektive Gruppe wirkt auch auf Untervarietäten. Natürlich nicht transitiv, Dimension und Grad bleiben erhalten.

Frage: Wirkt die Gruppe $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2)$ transitiv auf die Menge der Geraden in $\mathbb{P}^2$? Der irreduziblen Kurven zweiten/dritten Grades?

Moving Lemma: Es sei $X = \mathbb{P}^n$, A und B Zyklen. Dann gilt für generische $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2)$, dass gA und B generisch transversal sind.