Kommutative Algebra
und Algebraische Geometrie

Josef Schicho, JKU, RISC

December 6, 2023

Schnitt-Theorie

Theorem (Bezout): Zwei Kurven in $\mathbb{P}^2$ von Grad d und e schneiden einander in de Punkten.

Damit der Satz stimmt, muss man

- annehmen, dass die Kurven nicht gleich sind
- mit Vielfachheit zählen

Kodimension

Satz: Es sei X eine glatte Varietät, Y_1, Y_2 Untervarietäten. Es sei Z eine Komponente der algebraischen Menge $Y_1 \cap Y_2$. Dann ist

$$\mathrm{codim}(Z) \leq \mathrm{codim}(Y_1) + \mathrm{codim}(Y_2).$$

Beweis: Theorem 0.2 in [EiHa].

Eine quantitive Aussage über $Y_1 \cap Y_2$ ist nur dann zu erwarten, wenn für jede Dimension Gleichheit gilt (vgl. ersten Punkt in der letzten Folie).

Glattheit von X ist wichtig

Ohne Glattheit stimmt der Satz auf der letzten Folie nicht. Hier ist ein affines Gegenbeispiel.

Es sei $X = \{(x, y, z, w) \mid xy - zw = 0\}$,
$Y_1 = \{(0, y, 0, w) \mid y, w \in \mathbb{C}\}$,
$Y_2 = \{(x, 0, z, 0) \mid x, z \in \mathbb{C}\}$.

$\operatorname{codim}(Y_1) = \operatorname{codim}(Y_2) = 1$, $\operatorname{codim}(Y_1 \cap Y_2) = 3$.

Definition des Grades

Es sei $X \subset \mathbb{P}^n$ eine Varieät mit $\operatorname{codim}(X) = c$. Der Schnitt mit einem generischen linearen Unterraum von Kodimension $c' \leq n - d$ ist eine algebraische Menge von Kodimension $c + c'$ (Folgerung aus Bertini). Für $c' = n - c$ $(= \dim(X))$ erhalten wir eine endliche Menge von Punkten. Wir definieren $\deg(X)$ als die Anzahl der Punkte.
Die Anzahl der Punkte hängt nicht ab von der Wahl des generischen linearen Unterraums: alle generischen Punkte im Raum der linearen Unterräume von Dimension c' haben die gleichen Eigenschaften (siehe Folie 8 von `www.risc.jku.at/people/jschicho/aag/f03.pdf`).

Der Grad ist genauso definiert für algebraische Mengen deren Komponenten alle die gleiche Dimension haben.

Bezout in höherer Dimension

Satz: Es seien $Y_1, Y_2 \subset \mathbb{P}^n$ Untervarietäten sodass $c := \mathrm{codim}(Y_1) + \mathrm{codim}(Y_2) \leq n$. Wenn jede Komponente von $Y_1 \cap Y_2$ Kodimension c hat, dann ist

$$\deg(Y_1 \cap Y_2) = \deg(Y_1) \cdot \deg(Y_2).$$

Der Satz stimmt natürlich nur wenn die Komponenten von $Y_1 \cap Y_2$ mit der richtigen Vielfachheit gezählt werden.

Die richtige Definition der Vielfachheit zu finden hat ca. 50 Jahre gebraucht, und sie ist so kompliziert, dass man sie in der modernen Schnitt-Theorie kaum verwendet. Es ist einfacher, einer der beiden zu schneidenden Untervarietäten zu verändern, sodass zusätzliche Eigenschaften erfüllt sind, die die Definition der Vielfachheiten leichter macht.

Equivalenz – erster Versuch

Es sei X eine glatte Varietät. Eine *Familie* (von Untervarietäten) ist eine Untervarietät $U \subset (X \times \mathbb{A}^1)$, sodass die Projektion $U \to \mathbb{A}^1$ nicht konstant ist. Für jedes $t \in \mathbb{A}^1$ ist $U_t := \{x \in X \mid (x, t) \in U\}$.

Idee für Equivalenz: Zwei Untervarietäten $Y_1, Y_2 \subset X$ sind equivalent, wenn eine Familie U existiert, sodass $Y_1 = U_0$ und $Y_2 = U_1$ gilt.

Das Beispiel $X = \mathbb{P}^1$, $U = \{((x_0 : x_1), t) \mid x_0^2 - tx_1^2 = 0\}$ zeigt, dass es ratsam ist, bei den Familienmitgliedern sowohl mehrere Komponenten – $U_1 = (1 : 1) \cup (1 : -1)$ – als auch Vielfachheiten zuzulassen: $U_0 = (0 : 1)^2$.

Chow-Gruppen

Wir schreiben die Vereinigung von Untervarietäten der gleichen Dimension formal als Summe in die Vielfachheiten als ganzzahlige Koeffizienten. Im Beispiel oben:

$$U_0 = (1:1) + (1:-1),\ \ U_1 = 2(0:1)$$

Dazu passend definieren wir für $k = 0, \ldots, \dim(X)$:

$Z^k(X)$ ist die freie abelsche Gruppe erzeugt durch alle Untervarietäten von X mit Kodimension k (bestehend aus allen formalen Linearkombinationen von endlich vielen Untervarietäten mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}$; diese nennen wir Zyklen)

$\mathrm{Rat}^k(X)$ ist die Untergruppe erzeugt von allen Elementen der Form $U_0 - U_1$, wobei U eine Familie von Zyklen ist.

$A^k(X) := Z^k(X)/\mathrm{Rat}^k(X)$.

Trivialbeispiele

Beispiel 1: X beliebig, $k = 0$. Hier ist Z^0 erzeugt von X, $\mathrm{Rat}^k(X)$ ist $\{0\}$, und $A^0(X) = Z^0(X) \cong \mathbb{Z}$.

Beispiel 2: $X = \mathbb{A}^n$, $k > 0$. Es sei $Y \subset X$ eine Untervarietät von Kodimension k; wir nehmen oBdA an, dass $0 \notin Y$. Wir definieren

$$U = \{(x, t) \mid tx \in Y\}$$

Dann gilt $U_1 = Y$ und $U_0 = 0$. Also ist $\mathrm{Rat}^k(X) = Z^k(X)$ und $A^k(X) = 0$.