Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie

JOHANNES KEPLER
UNIVERSITY LINZ

Josef Schicho, JKU, RISC

November 30, 2023

Dimension von algebraischen Mengen

Es sei X eine algebraische Menge mit irreduziblen Komponenten $X_1, \ldots, X_k$. Wenn alle Varietäten die gleiche Dimension d haben, dann sagen wir $\dim(X) = d$. Ein Punkt in X heisst glatt wenn er in genau einer Komponente liegt und dort glatt ist.

Die Dimension von algebraischen Mengen unterschiedlicher Dimension ist in der Fachliteratur nicht ganz einheitlich. Manchmal wird sie als die maximale Dimension einer Komponente definiert, andere definieren Dimension lokal in der Nähe von Punkten. In dieser Vorlesung hat der Satz "X hat Dimension d" immer die Bedeutung "jede irreduzible Komponente hat die Dimension d". Wenn X nur Komponenten von Dimension d hat, dann nennen wir einen Punkt glatt, wenn er in genau einer maximalen Komponente liegt und dort glatt ist.

Zerlegung in glatte Untervarietäten

Satz: Jede Varietät ist eine endliche disjunkte Vereinigung von glatten quasiprojektiven Varietäten.
(Reminder: eine quasiprojektive Varietät ist eine Zariski-offene Teilmenge einer projektiven Varietät.)

Beweis: Sei X eine Varietät. Induktion nach $\dim(X)$.
Die Teilmenge der glatten Punkte von X ist offen und schon einmal die erste glatte quasiprojektive Varietät in unserer Vereinigung. Die singulären Punkte zerlegen wir in Komponenten. Diese sind von kleinerer Dimension und die Induktion greift.

Beispiel: $X = \{(x, y, z) \mid (x^2 - y^3)^2 - z^3 = 0\}$.

Der Satz von Bertini (Spezialfall)

Satz: Es sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine reguläre Funktion. Dann ist die Faser (das Urbild) des generischen Punktes eine glatte algebraische Menge von Dimension $n-1$ (die allerdings nicht irreduzibel sein muss).

Beweis: Das Urbild von $c \in \mathbb{C}$ ist gegeben durch die Gleichung $f(u_1, \dots, u_n) = c$. Die Vereinigung S der Mengen der singulären Punkte aller Fasern gegeben durch die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial u_1}(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial f}{\partial u_2}(u_1, \dots, u_n) \cdots = \frac{\partial f}{\partial u_1}(u_1, \dots, u_n) = 0.$$

Daraus folgt, dass die Einschränkung von f auf S lokal konstant ist. Also ist die Wertemenge endlich, und die generische Zahl ist nicht in der Wertemenge.

Der Satz von Bertini

Satz: Es sei X eine glatte Varietät der Dimension n und $f : X \to \mathbb{C}$ eine reguläre Funktion. Dann ist die Faser des generischen Punktes eine glatte algebraische Menge von Dimension $n - 1$.

Beweis: wie vorhin, nur wir man diesmal analytische Funktionen verwenden.

Der Satz von Sard

Satz: Es sei X eine Varietät der Dimension n und $f : X \to \mathbb{C}^m$ eine reguläre Abbildung, die generisch surjektiv ist. Dann ist die Faser des generischen Punktes eine glatte algebraische Menge von Dimension $n - m$.

Beweis: Wir schreiben f als $(f_1, \ldots, f_m)$ und wenden Bertini auf die Funktion $f_1 : U \to \mathbb{C}$ an. Die generische Faser F ist glatt und hat Dimension $n - 1$. Nun werden wir Bertini auf die Abbildung $f_2 : F \to \mathbb{C}$ an etc.

Abbildungen von maximalem Rang

Satz: Es seien X, Y glatte Varietäten und $f : X \to Y$ eine reguläre Abbildung, sodass der Rang der Jacobi-Matrix f' an jedem Punkt $x \in X$ gleich $\dim(Y)$ ist. Dann ist $f(X)$ eine Zariski-offene Teilmenge von Y und alle Fasern sind glatt mit Dimension $\dim(X) - \dim(Y)$.

Ein Beweis geht mit analytischen Funktionen beruht auf dem Theorem der impliziten Funktionen. Siehe auch `https://en.wikipedia.org/wiki/Submersion_(mathematics)`.

Abbildungen von konstantem Rang

Satz: Es seien X, Y glatte Varietäten und $f : X \to Y$ eine reguläre Abbildung, sodass der Rang der Jacobi-Matrix f' an jedem Punkt $x \in X$ gleich k ist, mit einem fixen $k \leq \max(\dim(X), \dim(Y))$. Dann ist $f(X)$ eine quasiprojektive Varietät von Dimension $n - m$, und die Fasern sind glatt von Dimension $\dim(X) - k$.

Der Beweis kann auf den Beweis des Satzes über Abbildungen von maximalem Rang von maximalem Rang zurückgeführt werden, indem man Komponenten im Bild weglässt.

Sprünge im Rang

Es seien X, Y glatte Varietäten und $f : X \to Y$ eine reguläre Abbildung. Wir nehmen an, dass das Bild maximale Dimension hat, also eine offene Teilmenge von Y enthält. Nach Sard ist die generische Faser glatt von Dimension $\dim(X) - \dim(Y)$. Was kann man über nicht-generische Fasern sagen?

Satz: Alle irreduziblen Komponenten von allen Fasern haben Dimension $\geq \dim(X) - \dim(Y)$.

Beweis-Idee: Es sei $X_0 := \{x \in X \mid \operatorname{rank}(f'(x)) = \dim(Y)\}$. Diese Menge ist Zariski-offen. Für alle $x \in X \setminus X_0$ ist $\operatorname{rank}(f'(x)) < \dim(Y)$. Wir zerlegen $X \setminus X_0$ in glatte quasi-projektive Varietäten $X_1, \ldots, X_k$, sodass $f'(x)$ auf jedem X_i konstanten Rang hat. Die Dimension der Faser ist gleich der Dimension des Kerns von f', und der hat Dimension $\dim(X) - \operatorname{rank}(f'(x)) > \dim(X) - \dim(Y)$.

Beispiele

- Ist das Bild von $(x, y) \mapsto (xy, y)$ offen?
- Auf `https://mathoverflow.net/questions/193/when-is-fiber-dimension-upper-semi-continuous` findet man zwei Abbildungen, die die Behauptung: "die Dimension der Faser kann nie nach unten springen" widerlegen.