Kommutative Algebra
und Algebraische Geometrie

Josef Schicho, JKU, RISC

November 22, 2023

Analytische Parametrisierung

Es sei $X \subset \mathbb{A}^n$ eine Varietät von Kodimension $k = n - \dim(X)$ und $p \in X$ ein glatter Punkt von X. O.B.d.A. nehmen wir an, dass es $P_1, \ldots, P_k \in I(X)$ gibt, sodass die Jacobi-Determinante $\left|\frac{\partial(P_1,\ldots,P_k)}{\partial(x_1,\ldots,x_k)}\right|$ bei p nicht verschwindet.
Dann ist auch die grössere Jacobi-Determinante $\left|\frac{\partial(P_1,\ldots,P_k,x_{k+1},\ldots,x_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}\right|$ bei p nicht Null. Nach dem Satz über die inversen Funktion hat die Abbildung

$$t : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (u_1, \ldots, u_n)$$

$$= (P_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, P_k(x_1, \ldots, x_n), x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

eine analytische Umkehrfunktion in einer metrischen Umgebung U von $t(p)$.

Deutung von Glattheit und Dimension

Proposition: Es sei $V = t(U) \in \mathbb{R}^n$ das isomorphe Bild von U. Dann t bildet $U \cap X$ bijektiv auf $V \cap \mathbb{R}^{n-k}$ ab. Informell: in der

Nähe eines glatten Punktes sieht X aus wie ein Vektorraum derselben Dimension.

Beweis: Es gilt $t(U \cap X) \subset \mathbb{R}^{n-k}$ – die ersten $n-d$ Koordinaten sind immer Null. Wir zeigen, dass $t(X)$ nicht in einer algebraischen Teilmenge von $\mathbb{R}^{n-k}$ enthalten ist. Angenommen, $P \in \mathbb{C}[x_{k+1}, \ldots, x_k]$ verschwindet auf $t(U \cap X)$. Weil t die Koordinaten x_{k+1}, x_n fix läßT, folgt, dass P auf $U \cap X$ verschwindet, und daher im Ideal $I(X)$ liegt. Die Matrix gebildet aus den Gradienten von $P_1, \ldots, P_k, P$ hat in jedem Punkt von X den Rang k. Da $\dim(X) = k$ ist, ist $\mathrm{grad}(P)$ modulo $I(X)$ eine Linearkombination der Gradienten von $P_1, \ldots, P_k$. Die Funktionen $P_1, \ldots, P_k$ sind aber genau die Koordinatenfunktionen in den u-Koordinaten. Also sind in den u-Koordinaten alle partiellen Ableitungen nach $x_{k+1}, \ldots, x_k$ gleich Null und es folgt, dass P auf X konstant ist. Wegen $P(p) = 0$ ist P die konstante Funktion 0.

Eigenschaften von Glattheit/Dimension

1. Wenn X und Y isomorph sind, dann ist $\dim(X) = \dim(Y)$. Jeder Isomorphimus bildet glatte Punkte auf glatte Punkte ab.
2. Die Teilmenge der singulären (nicht glatten) Punkte von X ist algebraisch.
3. $\dim(X \times Y) = \dim(X) + \dim(Y)$.
4. Wenn $X \subsetneq Y$, dann ist $\dim(X) < \dim(Y)$.
   Jede Varietät Y besitzt eine Teilvarietät X mit $\dim(X) = \dim(Y) - 1$.
5. Wenn $f : X \to Y$ surjektiv ist, dann ist $\dim(X) \geq \dim(Y)$.
6. Wenn X eine offene und nichtleere Teilmenge von Y ist, dann ist $\dim(X) = \dim(Y)$, und $q \in X$ ist genau dann glatter Punkt von X wenn q glatter Punkt in Y ist.

Ein Lemma für Später

Lemma: Es sei X eine Varietät von Dimension d und $p \in X$ glatt. Dann wird das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{X,p}$ von d regulären Funktionen erzeugt.

Beweis: Es sei $X \subset \mathbb{A}^n$, $k := n - d$, und $\left|\frac{\partial(P_1,\ldots,P_k)}{\partial(x_1,\ldots,x_k)}\right|(p) \neq 0$. In den analytischen Koordinaten von U ist das Ideal von p erzeugt von den Funktionen $u_1, \ldots, u_n$. Dem entsprechen die regulären Funktionen $P_1, \ldots, P_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$. Aus dem Nakayama-Lemma `https://en.wikipedia.org/wiki/Nakayama's_lemma` (Statement 5) folgt, dass diese Funktionen das Ideal auch im lokalen Ring erzeugen.

Nichtbeispiel

Frage: Es sei X die Kurve $\{(x_1, x_2) \mid x_1^2 - x_2^3 = 0\}$, und p ein Punkt auf X. Der Punkt p ist zwar nicht glatt, aber können wir vielleicht trotzdem das maximale Ideal $\mathcal{O}_{X,p}$ mit nur einem Element erzeugen?
Equivalent dazu: gibt es ein Polynom in x_1, x_2, das gemeinsam mit der Gleichung $x_1^2 - x_2^3$ das maximale Ideal $\langle x_1, x_a \rangle$ im lokalen Ring $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}$ erzeugt?

Ohne Beweis: p ist glatter Punkt von X genau dann, wenn das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{X,p}$ von $\dim(X)$ Elementen erzeugt werden kann. Sehr oft wird Glattheit von Punkten auf Varietäten definiert durch diese notwendige und hinreichende Bedingung.