Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie

Josef Schicho, JKU, RISC

November 15, 2023

Die Veronese-Abbildung

Es seien $n, m \in \mathbb{N}$. Das Bild der Veronese-Abbildung

$$v_{n,m} : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^{\binom{m+n}{m}-1},\ (x_0 : \cdots : x_n) \to (x_0^m : x_0^{m-1}x_1 : \cdots : x_n^m)$$

heißt Veronese-Varietät $V_{n,m}$. Das Beispiel vorhin ist $v_{1,2} : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ – $V_{1,2}$ ist die Quadrik $y_0 y_2 - y_1^2 = 0$.

Die Veronese-Abbildung ist ein Isomorphismus von $\mathbb{P}^n$ nach $V_{n,m}$. Für die Umkehrabbildung gibt es keine Darstellung, die überall definiert werden, aber für jeden Punkt gibt es eine Darstellung durch lineare Formen, die im jeweiligen Punkt definiert ist.

Frage: Man berechne eine Umkehrabbildung für

$$v_{2,2} : \mathbb{P}^2 \to V_{2,2} \subset \mathbb{P}^5,\ (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1^2 : x_1x_2 : x_2^2).$$

Produkte

Offensichtlich ist $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m = \mathbb{A}^{m+n}$. Daher ist das Produkt von zwei affinen algebraischen Mengen wieder eine affine algebraische Menge. Aber wie ist das im projektiven Fall?

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$. Die Abbildung

$$\sigma_{m,n} : (\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n) \to \mathbb{P}^{mn+m+n},$$

$$((x_0 : \cdots : x_m), (y_0 : \cdots : y_n)) \mapsto (x_0 y_0 : \cdots : x_m y_n)$$

heisst Segre-Abbildung.
Das Bild $\Sigma_{m,n}$ nennen wir Segre-Varietät.

Frage: Man zeige, dass $\Sigma_{m,n}$ die Nullstellenmenge aller 2×2-Unterdeterminanten der Matrix $(z_{ij})_{i=0,\dots,m, j=0\dots n}$ ist. Dabei sind die z_{ij} die projektiven Koordinaten von $\mathbb{P}^{mn+m+n}$.

Mehr Produkte

Beispiel: Die Segre-Varietät $\Sigma_{1,1} \subset \mathbb{P}^3$ ist die Quadrik mit Gleichung $z_{00}z_{11} - z_{10}z_{01} = 0$. Die Bilder $\sigma_{1,1}(\{p\} \times \mathbb{P}^1)$ und $\sigma_{1,1}(\mathbb{P}^1 \times \{q\})$ bilden zwei Geradenscharen. Zwei Geraden der gleichen Schar schneiden einander nicht; jede Gerade der ersten Schar schneidet jede Gerade der zweiten Schar in einem Punkt.

$\sigma_{m,n}$ ist ein Isomorphismus von $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ nach $\Sigma_{m,n}$. Für die Umkehrabbildung brauchen wir zwei Abbildungen $\pi_1 : \Sigma_{m,n} \to \mathbb{P}^m$ und $\pi_2 : \Sigma_{m,n} \to \mathbb{P}^n$. Beide kann man in jedem Punkt durch Linearformen definieren.

Das Jacobi-Ideal

Es sei $X \subset \mathbb{A}^n$ eine affine Varietät und $I(X)$ erzeugt von $G_1, \ldots, G_l \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Das k-te Jacobi-Ideal $J_k(X)$ ist das Ideal erzeugt von $G_1, \ldots, G_l$ und allen $k \times k$-Unterdeterminanten der Jacobi-Matrix $J_G := \frac{\partial(G_1,\ldots,G_l)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}$.

Beispiel: Es sei $n = 3$ und $X = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^3 - x_2^2 = x_3 = 0\}$. Dann ist

$$J_1 = \langle 1 \rangle,\ J_2 = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle,\ J_3 = I(X).$$

Frage: So wir gerade definiert, scheint $J_k(X)$ nicht nur von X, sondern auch von der Wahl der Erzeuger $G_1, \ldots, G_l$ abzuhängen. Ist das so?

Glattheit und Dimension

Es sei $X \subset \mathbb{A}^n$ eine affine Varietät. Es sei k die größte Zahl, für die $J_k(X) \neq I(X)$ ist. Dann definieren wir $\dim(X) := n - k$.
Für dieses $k = n - \dim(X)$ sagen wir "X ist glatt im Punkt $p \in X$" genau dann wenn ein $P \in J_k(X)$ existiert, sodass $P(p) \neq 0$ ist.

Beispiel: Die Varietät $X\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^3 - x_2^2 = x_3 = 0\}$ hat Dimension 1. Varietäten der Dimension 1 heissen *Kurven*.
Der Punkt $(0, 1, 0)$ ist glatt, der Punkt $(0, 0, 0)$ nicht.

Generische Punkte sind immer glatt. **Frage:** Warum?