Kommutative Algebra
und Algebraische Geometrie

Josef Schicho, JKU, RISC

November 8, 2023

Projektive Definitionen und Sätze

Die Definitionen von Zarski-Topologie, Verschwindungsideal, Varietät, und irreduziblem Komponenten ist verbatim auf projective algebraische Mengen übertragbar. Lemma 1, Theorem 1, Theorem 2 Punkte 1,2,3,5, und Theorem 3 gelten ebenfalls.

Das Verschwindungsideal einer projektiven algebraischen Menge ist *homogen* (d.h. es wird von homogenen Polynomen erzeugt). Teil 4 von Theorem 2 muss adaptiert werden:

4. Wenn I ein homogenes Ideal ist, aber nicht $\langle x_0, \ldots, x_n \rangle_R$, dann ist $I(V(I)) = \sqrt{I}$.

Offene Teilmengen

Die Teilmenge $U_0 = \{(x_0 : \cdots : x_n) \mid x_0 \neq 0\}$ (affiner Fleck) ist Zariski-offen. Sie ist homöomorph zu $\mathbb{A}^n$: der Homöomorphismus ist

$$(x_0 : \cdots : x_n) \mapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right), \ (y_1, \ldots, y_n) \mapsto (1 : y_1 : \cdots : y_n)$$

Affine algebraische Mengen werden homöomorph auf offene Teilmengen von projektiven algebraischen Mengen abgebildet werden.

Definition: Eine *quasi-projektive algebraische Menge* ist eine offene Teilmenge einer projektiven algebraischen Menge.

Jede projektive oder affine algebraische Menge kann als quasi-projektive algebraische Menge angesehen werden.

Reguläre Abbildungen

Es seien $X \subseteq \mathbb{P}^n$ und $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ projective algebraische Mengen. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt regulär, wenn es eine offene Überdeckung $X = \cup_i X_i$ gibt, sodass X_i und $f(X_i)$ affine algebraische Mengen sind und sodass $f|_{X_i} : X_i \to f(X_i)$ regulär ist.

Beispiel: Es sei $X := \mathbb{P}^1$ und $Y := Z(y_1^2 - y_2 y_0) \subset \mathbb{P}^2$. Es sei

$$f : X \to Y, \; (x_0 : x_1) \mapsto (y_0 : y_1 : y_2) := (x_0^2 : x_0 x_1 : x_1^2).$$

Um zu zeigen, dass f regulär ist, überdecken wir durch die beiden affinen Flecken $X = U_0 \cup U_1$, $U_0 \sim \mathbb{A}^1$ vermittels $(x_0 : x_1) \mapsto u_{10} = \frac{x_1}{x_0}$ und $U_1 \sim \mathbb{A}^1$ vermittels $(x_0 : x_1) \mapsto u_{01} = \frac{x_0}{x_1}$.

Beispiel Forts.

Es seien V_0, V_1, V_2 die affinen Flecken von $\mathbb{P}^2$. Dann sind $f(X_0) = Y \cap V_0 =: Y_0$ und $f(X_1) = Y \cap V_2 =: Y_1$ affin algebraisch: $Y_0 \subset \mathbb{A}^2$ ist gegeben durch die Gleichung $v_{10}^2 - v_{20} = 0$ und $Y_1 \subset \mathbb{A}^2$ ist gegeben durch die Gleichung $v_{12}^2 - v_{02} = 0$.
Die Einschränkungen von f sind

$$f|_{U_0} : U_0 \to Y_0, \; u_{10} \mapsto (v_{10}, v_{20}) = (u_{10}, u_{10}^2),$$

$$f|_{U_1} : U_1 \to Y_1, \; u_{01} \mapsto (v_{02}, v_{12}) = (u_{01}^2, u_{01}).$$

Warum definieren wir nicht enfach reguläre Abbildungen nach $\mathbb{P}^m$ als Abbildungen, die durch $m+1$ homogene Polynome von gleichem Grad dargestellt werden können, wie auf der vorigen Seite???

So einfach gehts nicht!

Die Abbildung $f : X \to Y$ im vorigen Beispiel ist bijektiv, und die beiden Umkehrabbildungen stimmen auf $Y_1 \cap Y_2$ überein. Daher ist f ein Isomorphismus.

Will man $f^{-1} : Y \to X$ durch homogene Polynome darstellen, bieten sich zwei Kandidaten an:

$$(y_0 : y_1 : y_2) \mapsto (y_0 : y_1) \text{ oder } (y_1 : y_2).$$

Auf Wenn $y_1 \neq 0$ ist, sind beide Ausdrücke gleich, da $y_0 y_2 - y_1^2 = 0$ ist.
Aber: der Ausdruck $(y_0 : y_1)$ ist im Punkt $(0 : 0 : 1)$ nicht definiert und der Ausdruck $(y_1 : y_2)$ ist im Punkt $(1 : 0 : 0)$ nicht definiert.

Frage: Man zeige, dass es für jede Darstellung von f^{-1} mindestens einen Punkt $y \in Y$ gibt, für den dieser Ausdruck nicht definiert ist.

Isomorphe Projektive Varietäten

Zwei projektive algebraische Mengen X, Y nennen wir *isomorph* oder *biregulär equivalent* wenn es reguläre Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ gibt, sodass $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ und $g \circ f = \mathrm{id}_X$ gilt.

Beispiel: Wie wir gesehen haben, sind $X = \mathbb{P}^1$ die Quadrik $Y = Z(y_1^2 - y_0 y_2)$ isomorph.