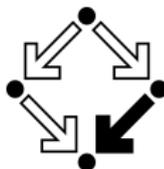


# Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie



Josef Schicho, JKU, RISC

November 8, 2023

# Projektive Definitionen und Sätze

Die Definitionen von Zariski-Topologie, Verschwindungsideal, Varietät, und irreduziblem Komponenten ist verbatim auf projective algebraische Mengen übertragbar. Lemma 1, Theorem 1, Theorem 2 Punkte 1,2,3,5, und Theorem 3 gelten ebenfalls.

Das Verschwindungsideal einer projektiven algebraischen Menge ist *homogen* (d.h. es wird von homogenen Polynomen erzeugt). Teil 4 von Theorem 2 muss adaptiert werden:

4. Wenn  $I$  ein homogenes Ideal ist, aber nicht  $\langle x_0, \dots, x_n \rangle_R$ , dann ist  $I(V(I)) = \sqrt{I}$ .

# Offene Teilmengen

Die Teilmenge  $U_0 = \{(x_0 : \cdots : x_n) \mid x_0 \neq 0\}$  (affiner Fleck) ist Zariski-offen. Sie ist homöomorph zu  $\mathbb{A}^n$ : der Homöomorphismus ist

$$(x_0 : \cdots : x_n) \mapsto \left( \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right), (y_1, \dots, y_n) \mapsto (1 : y_1 : \cdots : y_n)$$

Affine algebraische Mengen werden homöomorph auf offene Teilmengen von projektiven algebraischen Mengen abgebildet werden.

**Definition:** Eine *quasi-projektive algebraische Menge* ist eine offene Teilmenge einer projektiven algebraischen Menge.

Jede projektive oder affine algebraische Menge kann als quasi-projektive algebraische Menge angesehen werden.

# Reguläre Abbildungen

Es seien  $X \subseteq \mathbb{P}^n$  und  $Y \subseteq \mathbb{P}^m$  projective algebraische Mengen. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt regulär, wenn es eine offene Überdeckung  $X = \cup_i X_i$  gibt, sodass  $X_i$  und  $f(X_i)$  affine algebraische Mengen sind und sodass  $f|_{X_i} : X_i \rightarrow f(X_i)$  regulär ist.

**Beispiel:** Es sei  $X := \mathbb{P}^1$  und  $Y := Z(y_1^2 - y_2 y_0) \subset \mathbb{P}^2$ . Es sei

$$f : X \rightarrow Y, (x_0 : x_1) \mapsto (y_0 : y_1 : y_2) := (x_0^2 : x_0 x_1 : x_1^2).$$

Um zu zeigen, dass  $f$  regulär ist, überdecken wir durch die beiden affinen Flecken  $X = U_0 \cup U_1$ ,  $U_0 \sim \mathbb{A}^1$  mittels  $(x_0 : x_1) \mapsto u_{10} = \frac{x_1}{x_0}$  und  $U_1 \sim \mathbb{A}^1$  mittels  $(x_0 : x_1) \mapsto u_{01} = \frac{x_0}{x_1}$ .

## Beispiel Forts.

Es seien  $V_0, V_1, V_2$  die affinen Flecken von  $\mathbb{P}^2$ . Dann sind  $f(X_0) = Y \cap V_0 =: Y_0$  und  $f(X_1) = Y \cap V_2 =: Y_1$  affin algebraisch:  $Y_0 \subset \mathbb{A}^2$  ist gegeben durch die Gleichung  $v_{10}^2 - v_{20} = 0$  und  $Y_1 \subset \mathbb{A}^2$  ist gegeben durch die Gleichung  $v_{12}^2 - v_{02} = 0$ . Die Einschränkungen von  $f$  sind

$$f|_{U_0} : U_0 \rightarrow Y_0, \quad u_{10} \mapsto (v_{10}, v_{20}) = (u_{10}, u_{10}^2),$$

$$f|_{U_1} : U_1 \rightarrow Y_1, \quad u_{01} \mapsto (v_{02}, v_{12}) = (u_{01}^2, u_{01}).$$

Warum definieren wir nicht einfach reguläre Abbildungen nach  $\mathbb{P}^m$  als Abbildungen, die durch  $m + 1$  homogene Polynome von gleichem Grad dargestellt werden können, wie auf der vorigen Seite???

## So einfach gehts nicht!

Die Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  im vorigen Beispiel ist bijektiv, und die beiden Umkehrabbildungen stimmen auf  $Y_1 \cap Y_2$  überein. Daher ist  $f$  ein Isomorphismus.

Will man  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  durch homogene Polynome darstellen, bieten sich zwei Kandidaten an:

$$(y_0 : y_1 : y_2) \mapsto (y_0 : y_1) \text{ oder } (y_1 : y_2).$$

Auf Wenn  $y_1 \neq 0$  ist, sind beide Ausdrücke gleich, da  $y_0 y_2 - y_1^2 = 0$  ist.

Aber: der Ausdruck  $(y_0 : y_1)$  ist im Punkt  $(0 : 0 : 1)$  nicht definiert und der Ausdruck  $(y_1 : y_2)$  ist im Punkt  $(1 : 0 : 0)$  nicht definiert.

**Frage:** Man zeige, dass es für jede Darstellung von  $f^{-1}$  mindestens einen Punkt  $y \in Y$  gibt, für den dieser Ausdruck nicht definiert ist.

# Isomorphe Projektive Varietäten

Zwei projektive algebraische Mengen  $X, Y$  nennen wir *isomorph* oder *biregulär äquivalent* wenn es reguläre Abbildungen  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow X$  gibt, sodass  $f \circ g = \text{id}_Y$  und  $g \circ f = \text{id}_X$  gilt.

**Beispiel:** Wie wir gesehen haben, sind  $X = \mathbb{P}^1$  die Quadrik  $Y = Z(y_1^2 - y_0y_2)$  isomorph.