Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie

Josef Schicho, JKU, RISC

November 2, 2023

Der Funktionenkörper

Es sei $X \subset \mathbb{A}^n$ eine affine Varietät. Der Funktionenring $\mathbb{C}[X]$ hat dann keine Nullteiler. Sein Quotientenkörper heißt *Funktionenkörper* und wird mit $\mathbb{C}(X)$ bezeichnet.

Beispiel: Es sei $X = Z(x_1^2 + x_2^2 - 1) \subset \mathbb{A}^2$. Dann ist

$$\mathbb{C}(X) = \mathrm{FF}(\mathbb{C}[x_1, x_2] / \langle x_1^2 + x_2^2 - 1 \rangle_R)$$

Der Lokale Ring

Es sei X eine affine Varietät und $p \in X$. Der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,p}$ ist Teilring von $\mathbb{C}(X)$ bestehend aus allen Brüchen der Form P/Q, $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, sodass $Q(p) \neq 0$ gilt.

Proposition: Für alle $P/Q \in \mathcal{O}_{X,p}$ existiert eine Zariski-offene Umgebung U von p, bijektiv zu einer affinen Varietät U' ist, sodass die Funktion P/Q einer regulären Funktion auf U entspricht.

Beweis: Wir wählen $U := \{q \in X \mid Q(q) \neq 0\}$. Es sei $U' \subset \mathbb{A}^{n+1}$ die Nullstellenmenge aller Gleichungen von X und einer neuen Gleichung $Q(x_1, \ldots, x_n)x_{n+1} - 1 = 0$.

$$f : U \to U',\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, Q(x_1, \ldots, x_n)^{-1}),$$

$$g : U' \to U,\ (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$$

sind invers zueinander.

Mehr vom Lokalen Ring

Die Elemente von $\mathbb{C}(X)$ nennt man rationale Funktionen (obwohl es keine Funktionen auf ganz X sind). Der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,p}$ ist dann der Ring aller Funktionen, die in einer Zariski-Umgebung von p definiert sind.

In der Algebra heißt ein Ring *lokal*, wenn er genau ein maximales Ideal besitzt. $\mathcal{O}_{X,p}$ ist lokal im algebraischen Sinn: das maximale Ideal ist die Menge aller Funktionen, die bei p verschwinden.

Körperwechsel

Die algebraischen Konzepte Funktionenring, Funktionenkörper, lokaler Ring sind genauso sinnvoll, wenn man $\mathbb{C}$ durch einen anderen Körper $\mathbb{K}$ ersetzt; wir schreiben dafür $\mathbb{K}[X]$ bzw. $\mathbb{K}(X)$. Beim lokalen Ring muss der Körper im Kontext festgelegt werden.

Körpererweiterungen von $\mathbb{C}$ sind nie ein Problem. Teilkörper von $\mathbb{C}$ müssen zumindest die Koeffizienten der Gleichungen von X enthalten. Beim lokalen Ring: auch die Koordinaten des Punktes.

Wir sagen: $\mathbb{K}$ ist ein Definitionskörper von X, wenn $I(X)$ von Elementen in $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ erzeugt werden kann. (Oft ist $\mathbb{Q}$ ein Definitionskörper.)

Generische Punkte – Erste Definition

Es sei $X \subset \mathbb{A}^n$ eine affine Varietät.

Definition 1: Wenn P eine Eigenschaften von Punkten in X ist, die durch Gleichungen und Ungleichungen ausgedrückt werden kann, dann sagen wir "P ist für generische Punkte erfüllt", wenn die Menge $\{x \in X \mid \neg P(x)\}$ in einer echten algebraischen Teilmenge von X enthalten ist. (Generische Punkte gibt es eigentlich nicht, es ist nur eine Redeweise.)

Diese Definition ist zwar geometrisch anschaulich, manchmal aber unpraktisch. Man kann zum Beispiel nicht einfach sagen: "die Abbildung $f : X \to Y$ bildet generische Punkte von X auf generische Punkte von y ab".

Generische Punkte – Zweite Definition

Definition 2: Es sei $\mathbb{K}$ ein Definitionskörper von X. Ein Punkt $p = (x_1, \dots, x_p) \in X$ heißt generischer Punkt von X, wenn jede reguläre Funktion $P \in \mathbb{K}[X]$, die $P(p) = 0$ erfüllt, gleich Null ist.

Beispiel: Es sei $X = Z(x_1^2 + x_2^2 - 1) \subset \mathbb{A}^2$ und $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$. Jede reguläre Funktion in $\mathbb{K}[X]$ lässt sich schreiben als $P = P_1 + x_2 P_2$ mit $P_1, P_2 \in \mathbb{K}[X]$, weil wir modulo $x_1^2 + x_2^2 - 1$ rechnen können. Es sei $P \in \mathbb{Q}[x_1, x_2]$ so dass $P(\pi/4, \sqrt{1 - \pi^2/16}) = 0$ gilt, also $P_1(\pi) + \sqrt{1 - \pi^2/16} P_2(\pi) = 0$. Da π transzendent ist – siehe `https://en.wikipedia.org/wiki/Lindemann-Weierstrass_theorem` –, folgt, dass $P = 0$ sein muss. Damit ist $(\pi/4, \sqrt{1 - \pi^2/16})$ generischer Punkt.

Generische Eigenschaften

Wenn p ein generischer Punkt ist, und A eine Eigenschaft, die durch Gleichungen und Ungleichungen mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$ ausgedrückt werden kann, dann sind folgende Aussagen equivalent:

- p hat die Eigenschaft A;
- Die Menge aller Punkte in X, die A nicht erfüllt, ist enthalten in einer echten algebraischen Teilmenge.

Es folgt, dass alle generischen Punkte die gleichen Eigenschaften erfüllen.

Der lokale Ring beim generischen Punkt

Proposition: Wenn p ein generischer Punkt ist, dann ist der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,p}$ über $\mathbb{K}$ isomorph zu $\mathbb{K}(X)$.

Beweis: Wenn $P/Q \in \mathcal{O}_{X,p}$, dann ist $Q \in \mathbb{K}[X]$ und $Q(p) = 0$. Da p generisch ist, folgt $Q = 0$.

Der lokale Ring im Beispiel oben ist der Körper $\mathbb{Q}(\pi, \sqrt{1 - \pi^2/16})$. Der Funktionenkörper über $\mathbb{Q}$ ist $\mathrm{FF}(\mathbb{Q}[x_1, x_2]/\langle x_1^2 + x_2^2 - 1\rangle_R)$. Der Isomorphismus ist dann einfach die Auswertung $f \mapsto f(\pi, \sqrt{1 - \pi^2/16})$.

Der Projektive Raum

Der projektive Raum $\mathbb{P}^n$ ist definiert als $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ mit der Equivalenzrelation

$$v \sim w \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^* : \lambda v = w.$$

Die Equivalenzklasse von $(x_0, \ldots, x_n)$ bezeichnen wir mit $(x_0 : \cdots : x_n)$ (homogene Koordinaten).

Projektive Algebraische Mengen

Es sei $p \in R := \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ ein homogenenes Polynom von Grad $d > 0$. Dann gilt die Euler-Gleichung

$$p(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d p(x_0, \dots, x_n).$$

Die Auswertung eines Polynoms in einem Punkt $x \in \mathbb{P}^n$ ist nicht definiert, aber man kann feststellen, ob x eine Nullstelle von p ist – das hängt nicht von der Wahl des Representanten ab.

Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{P}^n$ heißt *algebraisch*, wenn sie die Menge der gemeinsamen Nullstellen einer Menge G von homogenen Polynomen in $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ ist.