Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie

Josef Schicho, JKU, RISC

October 11, 2023

Mehr über Ideale

Theorem 3:

1. Es seien $I_1, I_2 \in R$. Dann ist
$$Z(I_1 + I_2) = Z(I_1) \cap Z(I_2)$$
und
$$Z(I_1 \cdot I_2) = Z(I_1 \cap I_2) = Z(I_1) \cup Z(I_2).$$
2. Es seien $X_1, X_2 \in \mathbb{A}^n$. Dann ist
$$I(X_1 \cup X_2) = I(X_1) \cap I(X_2) = \sqrt{I(X_1) \cdot I(X_2)}$$
und
$$I(X_1 \cap X_2) = \sqrt{I(X_1) + I(X_2)}.$$

Frage: Man beweise einige Teile von Theorem 3.

Ideale und Projektionen

Es sei $m < n$ und $p : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ die Projektion $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_m)$.
Es sei $R_m \subset R$ der Teilring $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_m]$.

Theorem 4: Es sei $X \subset \mathbb{A}^n$ und $Y \subset \mathbb{A}^m$. Dann ist

$$I(p(X)) = I(X) \cap R_m$$

und

$$I(p^{-1}(Y)) = \langle I(Y) \rangle_R.$$

Frage: Man beweise Teile von Theorem 4.

Der Funktionenring

Es sei $X \subset \mathbb{A}^n$ eine algebraische Menge. Der Funktionenring $\mathbb{C}[X]$ ist definiert als der Ring aller regulären Funktionen von X nach $\mathbb{C}$, also aller Funktionen, die als Polynome dargestellt werden können (in der Regeln nicht eindeutig).

Wir haben einen surjektiven Ringhomomorphimus $R \to \mathbb{C}[X]$. Dessen Kern ist gerade $I(X)$. Also ist

$$\mathbb{C}[X] \cong R/I(X).$$

In der Fachliteratur wird der Funktionenring meistens "Koordinatenring" genannt; immerhin wird er von den Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ erzeugt.

Der Pullback

Es seien $X \in \mathbb{A}^n$, $Y \in \mathbb{A}^m$ algebraische Mengen. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt regulär, wenn sie von der Form $x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ mit $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{C}[X]$ ist.

Beobachtung: Für jede reguläre Funktion $g : Y \to \mathbb{C}$ ist die Funktion $g \circ f : X \to \mathbb{C}$ regulär. Die Abbildung $f^* : \mathbb{C}[Y] \to \mathbb{C}[X]$ ist ein Ringhomomorphimus; man nennt sie den *Pullback* von f.

Beispiel: Es sei $X = \mathbb{A}^2$, $Y = \mathbb{A}^3$, und $f : X \to Y$ die Abbildung $(x_1, x_2) \mapsto (x_1^2, x_1x_2, x_2^2)$. Der Ringhomomorphismus $f^* : \mathbb{C}[y_1, y_2, y_3] \to \mathbb{C}[x_1, x_2]$ bildet $p(y_1, y_2, y_3)$ auf $p(x_1^2, x_1x_2, x_2^2)$ ab.

Frage: Ist der Ringhomomorphimus f^* im obigen Beispiel surjektiv? Wenn nein, berechne man das Bild.
Ist er injektiv? Wenn nein, berechne man den Kern.

Funktorialität

Proposition 1: Es seien X, Y, Z algebraische Mengen, $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ reguläre Abbildungen. Dann ist $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Proposition 2: Es seien X, Y algebraische Mengen. Dann ist der Pullback eine Bijektion zwischen der Menge der regulären Abbildungen von X nach Y und der Menge der Ringhomomorphismen von $\mathbb{C}[Y]$ nach $\mathbb{C}[X]$.

Sprechweise: Pullback ist ein kontravarianter treuer voller Funktor von der Kategorie der algebraischen Mengen in die Kategorie der Ringe.

Isomorphe Algebraische Mengen

Zwei algebraische Mengen X, Y nennen wir *isomorph* oder *biregulär equivalent* wenn es reguläre Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ gibt, sodass $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ und $g \circ f = \mathrm{id}_X$ gilt.

Beispiel: Es sei $X = \mathbb{A}^1$ (die Gerade) und Y die Parabel $Y = Z(y_1^2 - y_2)$. Die regulären Abbildungen

$$f : X \to Y,\ (x_1) \mapsto (x_1, x_1^2);\ g : Y \to X,\ (y_1, y_2) \mapsto (y_1)$$

zeigen, dass X und Y isomorph sind.

Aus Proposition 1 folgt: zwei algebraische Mengen sind genau dann isomorph wenn ihre Funktionenringe isomorph sind.

Der Funktionenkörper

Es sei $X \subset \mathbb{A}^n$ eine affine Varietät. Der Funktionenring $\mathbb{C}[X]$ hat dann keine Nullteiler. Sein Quotientenkörper heißt *Funkionenkörper* und wird mit $\mathbb{C}(X)$ bezeichnet.

Beispiel: Es sei $X = Z(x_1^2 + x_2^2 - 1) \subset \mathbb{A}^2$. Dann ist

$$\mathbb{C}(X) = \mathrm{FF}(\mathbb{C}[x_1, x_2]/\langle x_1^2 + x_2^2 - 1\rangle_R)$$

$$\cong \mathbb{C}(x_1)[x_2]/\langle x_1^2 + x_2^2 - 1\rangle_{\mathbb{C}(x_1)}.$$