Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie

Josef Schicho, JKU, RISC

October 3, 2023

Überblick

1. Affine und Projektive Varietäten
2. Glattheit
3. Der Chow-Ring
4. Vektorbündel

Verwendete Literatur:

- D. Eisenbud and J. Harris: 3264 and all that. Springer 2016.
- wikipedia

Affine Algebraische Mengen

Sei $n \in \mathbb{N}$. Der affine Raum $\mathbb{A}^n$ ist der Vektorraum $\mathbb{C}^n$ – der feine Unterschied (für uns nicht weiter bedeutend) ist, dass der affinen Raum keinen Nullvektor hat – alle Punkte im $\mathbb{A}^n$ sind "gleichberechtigt".

Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{A}^n$ heißt *algebraisch*, wenn sie die Menge der gemeinsamen Nullstellen einer Menge G von Polynomen in $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ ist.

Beispiele von algebraischen Mengen sind lineare Unterräume, Quadriken, endliche Mengen, die leere Menge, oder $\mathbb{A}^n$ selbst.

Frage 1: Man zeige, dass beliebige Durchschnitte und endliche Vereinigungen von algebraischen Mengen wieder algebraisch sind.

Die Zariski-Topologie

$\mathbb{C}^n$ ist ein metrischer Raum und besitzt als solcher eine Topologie. Eine zweite Topologie – die Zariski-Topologie – definieren wir, indem wir festlegen, wann eine Teilmenge offen ist: genau dann, wenn ihr Komplement algebraisch ist.

Beispiel: Im Fall $n = 1$ ist jede algebraische Menge entweder $\mathbb{A}^1$ selbst oder endlich. Die Zariski-Topologie stimmt hier überein mit der *ko-endlichen Topologie*: eine nichtleere Menge ist genau dann offen, wenn ihr Komplement endlich ist.

Die Zariski-Topologie ist *gröber* als die metrische Topologie: jede Menge, die in der Zariski-Topologie offen ist, ist auch in der metrischen Topologie offen.

Frage 2: Man zeige, dass jede Abbildung $f : \mathbb{A}^m \to \mathbb{A}^n$, die durch Polynome gegeben ist, stetig ist; equivalent dazu, das Urbild jeder abgeschlossenen Menge ist abgeschlossen. Wir nennen solche Abbildungen *regulär*.

Varietäten

Eine algebraische Menge heißt *irreduzibel* oder *Varietät*, wenn sie keine Vereinigung von zwei echten algebraischen Teilmengen ist. Wenn X eine algebraische Menge ist, dann nennen wir die maximale Teilvarietäten von X seine “irreduziblen Komponenten”.

Lemma 1: Jede absteigende Kette von algebraischen Mengen $X_1 \supsetneq X_2 \supsetneq X_3 \ldots$ bricht ab.

In `https://en.wikipedia.org/wiki/Hilberts_basis_theorem` werden mehrere Beweise angegeben.

Theorem 1: Jede algebraische Menge ist die endliche Vereinigung ihrer irreduziblen Komponenten.

Übung 1: Man zeige, dass das Theorem aus dem Lemma folgt.

Ideale

Es sei $X \subset \mathbb{A}^n$ eine Menge und $R := \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Die Menge $I(X)$ der Polynome $F \in R$, die auf ganz X verschwinden, ist ein Ideal, das *Verschwindungsideal* von X.

Beispiel: Das Verschwindungsideal des Einheitskreises $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{A}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0\}$ ist $\langle x_1^2 + x_2^2 - 1 \rangle_R$.

Es sei $I \subseteq R$ ein Ideal. Die algebraische Menge $Z(I)$ der gemeinsamen Nullstellen aller Polynome in I heißt *Nullstellenmenge* von I.

Beispiel: Die Nullstellenmenge von $\langle x_1 x_2, x_1 x_3, x_2 x_3 \rangle_R$ ist die Vereinigung der drei Koordinatenachsen.

Ideale

Theorem 2:

1. $I_1 \subseteq I_2 \implies Z(I_1) \supseteq Z(I_2)$
2. $X_1 \subseteq X_2 \implies I(X_1) \supseteq I(X_2)$
3. $Z(I(X))$ ist der Abschluss von X in der Zariski-Topologie
4. $I(Z(I))$ ist das Radikalideal $\sqrt{I} = \{a \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} : a^n \in I\}$
5. X ist Varietät genau dann wenn $I(X)$ ein Primideal ist.

Übung 2: Man zeige die Teile 1,2,3,5 in der Zariski-Topologie.

Teil 4 ist eine von mehreren Formulierungen von `https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert's_Nullstellensatz`. Auf der verlinkten Beweise sind drei Beweise angegeben; keiner der drei ist einfach.