Algorithmen in anderen Systemen. Das System ist eines der wenigen, bei denen man auch die zugrundeliegende mathematischen Ideen studieren kann.

4.6 SCRATCHPAD II

Hardware: IBM Rechner mit VM Betriebssystem.

Bezugsquellen/Verfügbarkeit: Scratchpad wird von der Computer Algebra Group, Knowledge Systems, Computing Technology Department, IBM Thomas J. Watson Research Center, Box 218, Yorktown Heights, New York 10598, USA unter der Leitung von Dr. R.D. Jenks entwickelt. Das System ist derzeit noch nicht allgemein verfügbar.

Literatur: Eine Einführung in die Fähigkeiten des Systems gibt /Jenks 1984/. Eine kurze Beschreibung gibt /Sutor 1985/. Neue Informationen über das System sowie Berichte über Anwendungen findet man im "Scratchpad II Newsletter", der von IBM herausgegeben wird.

Charakterisierung: Scratchpad II zeichnet sich durch eine besondere Philosophie für die vom Benutzer verwendeten "Datentypen" aus, die es ermöglichen, Programme für sehr allgemeine Bereiche zu schreiben, um sie dann für viele konkrete Bereiche zu verwenden. (Z.B. kann ein Algorithmus zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers, der für den Bereich "Euklidischer Ring" geschrieben wurde, sowohl auf ganze Zahlen als auch auf Polynome mit rationalen Koeffizienten angewandt werden.) Scratchpad II ist ein universelles, interaktiv arbeitendes System.

4.7 SMP

Hardware: DEC VAX 11 Serie mit VMS

Bezugsquellen/Verfügbarkeit: SMP wurde im wesentlichen von S. Wolfram entwickelt und wird jetzt von der Inference Corporation, Suite 501, 5300 W. Century Blvd., Los Angeles, California 90045, USA, vertrieben.

Literatur: Eine Einführung in die Fähigkeiten des Systems gibt der von Inference Corp. erhältliche "SMP Primer".

Charakterisierung: SMP ist ein universelles, interaktiv arbeitendes System.

5 Computer-Algebra-Algorithmen

5.1 Vorbemerkung: Computer-Algebra versus reine Mathematik

"Reine" Mathematiker sind manchmal der Meinung, daß die Lösung von mathematischen, insbesondere algebraischen Problemen mit dem Computer darin besteht, "unintelligente" Einzelschritte sehr oft und sehr schnell hintereinander auszuführen, wogegen der Mathematiker bei der "händischen" Lösung von mathematischen Problemen bei jedem Schritt seine mathematischen Einsichten einsetzt (und damit oft durch wenige, langsame, aber "intelligente" Schritte im gesamten oft schneller zum Ziel kommt). Das heißt also: es wird manchmal gleichgesetzt

> Computer-Mathematik = Anwenden *unintelligenter Verfahren* (z.B. "Probieren aller endlich vielen Möglichkeiten") auf *unintelligenter*, aber schneller *Hardware* (dem Computer) (und beobachten, was für Resultate entstehen; "Experimentalmathematik").
>
> Reine Mathematik = Anwenden *intelligenter Verfahren* auf *intelligenter*, aber langsamer Hardware (dem Mathematiker) (und a priori beweisen, welche Eigenschaften die Resultate haben müssen; "Beweisende Mathematik").

Dies ist ein grobes Mißverständnis. Genau das Gegenteil ist der Fall:

> Um mit *unintelligenter* Hardware mathematische Probleme lösen zu können, muß man mit *intelligenteren* Verfahren arbeiten (PRINZIP *der Erhaltung der Summe von Verfahrensintelligenz und Hardwareintelligenz).*

Woher kommen intelligentere Verfahren? Intelligentere Verfahren inkorporieren mehr mathematisches Wissen, mehr mathematische Einsicht. Allgemein bewiesene mathematische Aussagen bilden die Grundlage für *effektive* (d.h. auf völlig unintelligenter Hardware überhaupt ausführbare) und *effiziente* (d.h. mit wenig Rechenzeit und Speicher ausführbare) Verfahren (Algorithmen). Es gilt das PRINZIP:

> *Mehr mathematisches Wissen ⇒ Effizientere Algorithmen.*

Um zu effizienten (algebraischen) Algorithmen zu gelangen, muß man also noch tiefer in der Mathematik einsteigen, als wenn man nur an "prinzipiellen", im allgemeinen nicht algorithmisch ausführbaren Lösungen mathematischer Probleme interessiert ist, d.h. man muß in dem betrachteten Problembereich versuchen,

neues algorithmisch brauchbares Wissen zu beweisen.

Die ganze algorithmische Kraft steckt dabei in den Beweisen. Die Kraft der Beweise beruht auf dem PRINZIP:

> Ein einmal *(in endlich vielen Schritten) geführter Beweis* für einen nicht-trivialen mathematischen Satz führt bei den *unendlich vielen Angaben* für das entsprechende Problem zur *schnelleren* algorithmischen Bestimmung der Lösung.

(Die Beschleunigung, die durch einen mathematischen Satz für die algorithmische Lösbarkeit eines mathematischen Problems erzielt werden kann, könnte geradezu als ein Maß für die Brauchbarkeit, die "Interessantheit" des betreffenden Satzes betrachtet werden.) Demgegenüber ist es oft beim *"händischen" Bearbeiten von Problemen* nicht notwendig, sehr tiefe allgemeine mathematische Gesetzmäßigkeiten anzuwenden. Beim händischen Bearbeiten kann man oft sowieso nicht sehr große Beispiele betrachten und bei den einfachen Angaben sieht man oft Vereinfachungen, die allgemein gar nicht gelten müssen. Oder man kommt tatsächlich mit dem Durchprobieren aller Möglichkeiten aus. (Oft betrachtet die reine Mathematik ein Problem als "gelöst", wenn man gezeigt hat, daß es "nur" endlich viele Möglichkeiten gibt.)

5.2 Ein einfaches Beispiel für obige Prinzipien:

Wir betrachten das

Problem:

Gegeben: Zwei natürliche Zahlen x,y.
Gesucht: Der größte gemeinsame Teiler z von x und y. ∎

Die Definition des Begriffs "größter gemeinsamer Teiler" legt folgenden, *einfachen* ("unintelligenten") *Algorithmus* zur Bestimmung von z nahe:

```
for u := 1 to Minimum von x und y do
  if (u teilt x) und (u teilt y)
  then z := u ∎
```

Zusätzliches mathematisches Wissen (W):

$ggT(x,0) = x$
$ggT(x,y) = ggT(y,Rest(x,y))$ (falls $y \neq 0$)

(Hier steht "ggT(x,y)" für "größter gemeinsamer Teiler von x und y" und "Rest(x,y)" für "Rest bei der (ganzzahligen) Division von x durch y".) ∎

Beweis dieses Wissens:
Man zeigt in ein paar Zeilen (endlich vielen Zeilen!), daß (im Fall $y \neq 0$):
für alle z: z teilt x und y genau dann wenn z teilt y und Rest(x,y)

Das zusätzliche Wissen (W) über den Begriff des größten gemeinsamen Teilers legt folgenden *besseren* ("intelligenteren") *Algorithmus* nahe (Algorithmus von Euklid, ca. 300 v. Chr.):

```
while y≠0 do
  (x,y) := (y,Rest(x,y))
z := x ∎
```

Während das erste einfache Verfahren, sehr grob betrachtet, maximal $c_1.x.L(y)^2$ viele Schritte braucht, braucht das zweite Verfahren maximal $c_2.L(x).L(y)$ viele Schritte. (Hier sei ein "Schritt" eine Operation auf einer Ziffer; L(x) ist die "Länge" der Zahl x, d.h. die Anzahl der Ziffern von x; c_1 und c_2 sind Konstante, die durch die verwendete Maschine und die Implementierung der Algorithmen bestimmt sind; wir haben hier vorausgesetzt, daß L(x) kleiner oder gleich L(y) ist).

Die Abschätzungen über die Rechenzeiten der beiden Algorithmen zeigen, daß das zweite Verfahren "grundsätzlich", d.h. unabhängig von den Konstanten c_1 und c_2, d.h. unabhängig von den verwendeten Maschinen, besser ist. Das heißt genauer: Wie klein auch c_1 ist und wie groß auch c_2, d.h. wie gut auch die Maschine ist, auf der der erste Algorithmus implementiert wird und wie schlecht auch die Maschine ist, auf der der zweite Algorithmus implementiert wird, so gibt es immer eine Länge, ab welcher der zweite Algorithmus weniger Rechenzeit braucht als der erste. Man sagt kurz auch: Die *(Komplexitäts-) Ordnung* des ersten Algorithmus ist größer als die Ordnung des zweiten Algorithmus oder

$$O(x.L(y)^2) > O(L(x).L(y)).$$

Für das händische Rechnen bei kleinen Eingaben ist das starke mathematische Wissen (W) ein "overkill". Wenn man z.B. den größten gemeinsamen Teiler von 28 und 36 rechnet, "sieht man gleich", daß beide Zahlen 2 als Teiler enthalten, sogar zweimal und daß die verbleibenden Teiler 7 und 9 teilerfremd sind. "Also" $ggT(28,36) = 4$.

Die kurze Betrachtung über die Komplexitätsordnung von Algorithmen zeigt noch ein weiteres: Je größer die *Fortschritte in der Hardwaretechnologie* werden, (d.h. z.B.

je schneller die verfügbaren Maschinen werden), desto wichtiger werden Fortschritte in der Verbesserung, d.h. *Beschleunigung von Algorithmen* auf der Basis von mehr mathematischem Wissen. Denn:

> Ein schlechter Algorithmus (mit hoher Komplexitätsordnung) erlaubt bei der Erhöhung der Rechenleistung der verfügbaren Maschinen nur eine geringe Ausdehnung des Eingabebereiches des Algorithmus.
>
> Ein guter Algorithmus erlaubt auf besseren Maschinen hingegen die Ausdehnung des Eingabebereiches um ein Beträchtliches.

(Man überlege z.B.: Ein Algorithmus mit Rechenzeit 2^n, der auf einer schlechten Maschine Eingaben bis zur "Größe" $n = 20$ zuläßt, läßt auf einer 64 mal so schnellen Maschine Eingaben bis zur Größe 26 zu, also nur 1.3 mal so große Eingaben. Ein Algorithmus mit Rechenzeit n^2, der auf derselben schlechten Maschine Eingaben bis zur Größe 1024 zuläßt, läßt auf der 64 mal so schnellen Maschine immerhin Eingaben bis zur Größe 8192 zu, also 8 mal so große Eingaben.)

Zusammenfassend also:

Die Bedeutung der Entwicklung neuen mathematischen, algorithmisch brauchbaren Wissens für die Computer-Mathematik, insbesondere Computer-Algebra, wird in der Zukunft nicht abnehmen, sondern immer mehr steigen. Echte Fortschritte in der Lösung der Probleme der Computer-Algebra werden nur durch Kombination bester mathematischer Techniken mit den besten Errungenschaften der Softwaretechnologie erzielt werden können.

In diesem Abschnitt werden wir anhand einiger ausgewählter Beispiele von Algorithmen der Computer-Algebra die obigen Prinzipien demonstrieren und vor allem die jeweiligen zusätzlichen mathematischen Erkenntnisse skizzieren, auf denen der algorithmische Fortschritt beruht.

Wir müssen hier jedoch bemerken, daß es im begrenzten Umfang dieses Abschnittes unmöglich ist, einen Eindruck von der Reichhaltigkeit der mathematisch/algorithmischen Ideen zu vermitteln, die hinter den heutigen Computer-Algebra-Systemen stehen. Immerhin sollte die getroffene Auswahl jedoch unter anderem auch die Einsicht liefern, daß für die Lösung schwieriger Probleme in der Computer-Algebra die Lösung einer Reihe von Unterproblemen und Unterunterproblemen notwendig ist, sodaß heute ein hierarchisch gegliedertes Netz von Algorithmen vorliegt, wo algorithmische Verbesserungen an einer Stelle zahlreiche Konsequenzen für die Lösung hierarchisch übergeordneter Probleme haben. Wohl eines der besten Beispiele dafür ist das Problem der "Quantoren-Elimination" (siehe später den Collins-Algorithmus). Dieses Problem hat durch die grundlegenden Arbeiten von G. Collins seit Anfang der sechziger Jahre die Forschung für fast alle derzeitigen Grundprobleme und Unterprobleme der Computer-Algebra (Arithmetik in verschiedenen algebraischen Bereichen, exaktes Lösen von polynomialen Gleichungen, Faktorisieren von Polynomen etc.) stimuliert bzw. initiiert.

Wir zeigen den Gedanken des hierarchisch gegliederten Netzes von Algorithmen durch Auswahl einiger markanter Punkte steigender Problemallgemeinheit in diesem Netz:

- der Karatsuba-Ofman-Algorithmus zur Multiplikation von Zahlen,
- der Berlekamp-Hensel-Algorithmus zum Faktorisieren von Polynomen,
- die Methode der Gröbner-Basen für Probleme mit multivariaten Polynomen,
- der Collin'sche Algorithmus zur zylindrisch-algebraischen Dekomposition.

Ein anderes derartiges, hierarchisch sehr globales Problem ist das symbolische Integrieren und Summieren bzw. die symbolische Lösung von Differentialgleichungen, auf das wir hier nicht einmal skizzenhaft eingehen können.

5.3 Der Algorithmus von Karatsuba-Ofman zur Multiplikation

Wir betrachten zunächst ein sehr einfaches, grundlegendes Problem, nämlich die Multiplikation beliebig langer ganzer Zahlen in der üblichen Darstellung als Ziffernfolge z.B. zur Basis 10 oder zu irgend einer anderen Basis. In Computer-Algebra-Systemen nimmt man meist als Basis eine Zahl, die in etwa in einem Computerwort Platz hat, z.B. 2^{31} o.ä., weil man dann Darstellungen der Zahlen mit relativ wenig Ziffern bekommt und trotzdem die elementaren Operationen auf Ziffern noch in einer Zeiteinheit möglich sind. Man wird an diesem Problem sehen, daß man selbst bei einfachen und "im Prinzip" längst behandelten Problemen durch Einbringen von zusätzlichem mathematischem Wissen noch entscheidende algorithmische Verbesserungen erzielen kann.

Problem:

Gegeben: x,y zwei Ziffernfolgen.
Gesucht: z eine Ziffernfolge,
sodaß die durch z dargestellte Zahl =
das Produkt der durch x und y dargestellten Zahlen. ∎

Einfacher Algorithmus:
Die bekannte Methode, wo "jede Ziffer von x mit jeder Ziffer von y multipliziert wird mit geeigneten Überträgen und Verschiebungen". Die Anzahl der Schritte dieser Methode ist $O(L(x).L(y))$ (also $O(L(x)^2)$, wenn $L(x)=L(y)$).

Analyse des Multiplikationsbegriffs:
Wir schreiben x' für die durch die Ziffernfolge x dargestellte Zahl. Der Einfachheit halber nehmen wir als Basis der Darstellung 10 und betrachten zwei gleich lange Ziffernfolgen x und y, die beide gerade Länge n haben mögen. Die Ziffernfolgen lassen sich dann in zwei gleich lange Ziffernfolgen zerschlagen:

```
[      x      ]  =  [  a  |  b  ]
[      y      ]  =  [  c  |  d  ]
   Länge n            Länge (n/2)  Länge (n/2)
```

Es gilt:
$x'.y' = (a'.10^{(n/2)}+b').(c'.10^{(n/2)}+d') =$
$= (a'.c').10^n+(a'.d'+b'.c').10^{(n/2)}+b'd'$ (*).

Die Multiplikation von x' und y' ist damit also reduziert auf die 4 Multiplikationen a'.b', a'.d', b'.c' und b'.d', sämtlich von halber Länge. Durch Fortführung dieser Reduktion würde man schließlich zu lauter Multiplikationen von einzelnen Ziffern kommen. Allerdings zeigt eine leichte Komplexitätsanalyse, daß damit keine Beschleunigung erreicht wird, man kommt im wesentlichen genau zur üblichen Methode, d.h. die Komplexitätsordnung bleibt $O(L(x)^2)$.

Zusätzliches mathematisches Wissen:
Es gilt:
$(a'.d'+b'.c') = (a'+b').(c'+d') - a'.c' - b'.d'$ (**).

Dies zeigt, daß man in (*) die *zwei* Multiplikationen a'.d' und b'.c' durch die *eine* Multiplikation (a'+b').(c'+d') der Zahlen (a'+b') und (c'+d') ersetzen kann, weil die in (**) benötigten Produkte a'.c' und b'.d' in (*) sowieso schon einmal zu berechnen sind. Die Zahlen (a'+b') und (c'+d') haben aber (im wesentlichen) die Länge (n/2). Es gilt also:

Die Multiplikation x'.y' läßt sich zurückführen auf nur 3 Multiplikationen von halber Länge!

Diese Beobachtung stammt von /Karatsuba,Ofman 1962/. Rekursive Fortführung dieser Reduktion liefert einen entscheidend besseren Algorithmus, für den man

durch leichte Analyse feststellt, daß seine Komplexitätsordung nur mehr $O(L(x)^{ld3})$ ist. Dieser Algorithmus wird in der Tat in Computer-Algebra-Systemen für die Multiplikation langer Zahlen (die mehr als nur einige Computerworte einnehmen) angewandt.

Besserer Algorithmus (Karatsuba-Ofman 1962):
$z = x \otimes y$:
Bestimme a,b,c,d, sodaß
$[\ x\ ] = [\ a\ |\ b\ ]$, $[\ y\ ] = [\ c\ |\ d\ ]$
$u := a \otimes c$
$v := b \otimes d$
$w := (a \oplus b) \otimes (c \oplus d) \ominus u \ominus v$
$z := [\ u\ |\ ] \oplus [\ |\ w\ |\ ] \oplus [\ |\ v\ ]$
Länge: n n n (n/2) (n/2) n (n/2) (n/2)

(hier stehen $\oplus$, $\ominus$, $\otimes$ für die Operationen auf den Ziffernfolgen, sodaß z.B. $(x \oplus y)' = x'+y'$, etc.) ∎

Bemerkung: Der Grundgedanke des Karatsuba-Ofman-Algorithmus läßt sich auch für die Multiplikation von Polynomen anwenden.

5.4 Der Berlekamp-Hensel-Algorithmus zur Faktorisierung von Polynomen

Problem:

Gegeben: f — ein Polynom in einer Variablen mit ganzzahligen Koeffizienten

Gesucht: $p_1,...,p_t$ — ganzzahlige Polynome,
sodaß $p_1,...,p_t$ irreduzibel und $f = \Pi_{i=1,...,t}\ p_i$ ("irreduzibel" heißt hier: nicht weiter zerlegbar in Faktoren mit ganzzahligen Koeffizienten) ∎

So einfach dieses Problem zu formulieren ist, so schwierig ist es, einen effizienten Algorithmus zur Lösung dieses Problems zu finden. Das Problem hat eine lange Geschichte mit drei wesentlichen Etappen:

Kronecker's Methode (1882; in der Tat war Kroneckers Arbeit eine Wiederentdeckung einer bereits früher entwickelten Methode),

die Methode von Berlekamp und Zassenhaus (1967 bzw. 1969) und zahlreiche davon ausgehende Arbeiten,

die Methode von A. Lenstra, H. Lenstra, L. Lovász (1982 ff.) und davon ausgehende Arbeiten.

Die zweite und dritte dieser Etappen ist dadurch gekennzeichnet, daß wesentlich neues mathematisches Wissen entwickelt wurde, das eine drastische Effizienzverbesserung bei der Lösung des Problems zuläßt, während die erste Etappe durch ein sehr einfaches mathematisches Wissen charakterisiert ist, welches den Übergang von einem reinen Existenzbeweis (für die irreduziblen Faktoren) zu einem Algorithmus zur Bestimmung der irreduziblen Faktoren erlaubt. Das Faktorisierungsproblem ist also ein schönes Beispiel für das Prinzip "Mehr mathematisches Wissen ⇒ Besserer Algorithmus". Wir besprechen hier beispielhaft nur die erste Etappe und einen Teil der zweiten. (Die dritte Etappe hat (noch) nicht zu praktischen Rechenzeitverbesserungen geführt, weil der organisatorische Overhead der Methode bei "kleinen" Polynomen die prinzipielle Effizienzverbesserung erschlägt.) Für eine ausführlichere Übersicht über Faktorisierungsmethoden siehe /Kaltofen 1982/.

Einfaches Wissen:

(Homomorphie)

Seien f,g,h ganzzahlige Polynome, sodaß $f=g.h$, und sei a eine ganze Zahl. Dann gilt auch $f(a)=g(a).h(a)$.

(Interpolationspolynom)

Seien $x_0,...,x_n,y_0,...,y_n$ reelle (z.B. ganze) Zahlen. Dann kann man ein Polynom f n-ten Grades konstruieren, sodaß $f(x_i)=y_i$ (für $i=0,...,n$) (das "Interpolationspolynom" zu den Punkten $(x_0,y_0),...,(x_n,y_n)$). Dieses Polynom ist eindeutig bestimmt. ∎

Aus diesen zwei Tatsachen ergibt sich unmittelbar folgender Algorithmus:

Einfacher Algorithmus (Kronecker 1882):

(Initialisiere)

Wähle beliebige, verschiedene ganze Zahlen $a_0,...,a_n$, wo n die größte ganze Zahl kleiner oder gleich ½(Grad von f) ist. Faktorisiere jede der ganzen Zahlen $f(a_0),...f(a_n)$ vollständig in Primfaktoren.

(Interpoliere)

Für jede Kombination $r_0,...,r_n$,

wo r_0 Primfaktor von $f(a_0)$, ..., r_n Primfaktor von $f(a_n)$ ist,

bestimme das Interpolationspolynom g zu den Punkten $(a_0,r_0),...,(a_n,r_n)$.

Wenn g ein Teiler von f ist:

Wende den Algorithmus rekursiv auf g und f/g an. Dann ist $\{p_1,..,p_t\}$ die Vereinigung der Mengen der irreduziblen Faktoren von g und f/g (und der Algorithmus kann verlassen werden).

(Irreduzibler Fall)

Wenn für keine Kombination ein Faktor g von f erzeugt wurde:

Antwort "f ist irreduzibel". ∎

Die Betrachtung "aller Kombinationen" im Schritt (Interpoliere) ist ein "exponentieller" Vorgang. Das Verfahren ist daher nicht sehr effizient.

Zusätzliches mathematisches Wissen:

(Hensel-Lemma)

Siehe für dieses Lemma über univariate Polynome die Lehrbücher über Algebra. Unter Verwendung (einer algorithmischen Version) dieses Lemmas hat /Zassenhaus 1969/ das obige Faktorisierungsproblem zurückgeführt auf das Faktorisierungsproblem von Polynomen mit Koeffizienten in den endlichen Körpern Z_p. (Diese Reduktion des Problems kann in besonders ungünstigen Fällen allerdings immer noch zu "exponentiellen" Rechenzeiten führen.)

(Lemma über quadratfreie Faktoren)

Ein Polynom a ist genau dann quadratfrei, wenn a und die Ableitung a' relativ prim sind.

Mit diesem einfachen Lemma kann das Faktorisierungsproblem "einfach" (nämlich nur durch die Bestimmung von größten gemeinsamen Teilern) auf die Faktorisierung von quadratfreien Polynomen zurückgeführt werden. (Quadratfreie Polynome sind Polynome, in welchen jeder Faktor nur einmal vorkommt.)

Problem der Faktorisierung quadratfreier Polynome über Z_p:

Gegeben: f ..... ein quadratfreies Polynom mit Koeffizienten in Z_p

(Für eine Primzahl p ist Z_p der algebraische Bereich, der aus den Objekten 0,...,(p-1) besteht, mit den Operationen $\oplus$, $\ominus$, $\otimes$, $\oslash$ (Division) "modulo p", die wie folgt definiert sind:

$x \oplus y :=$ Rest bei der Division von $x+y$ durch p,

$x \ominus y :=$ Rest bei der Division von $x-y$ durch p,

$x \otimes y :=$ Rest bei der Division von $x.y$ durch p,

$x \oslash y :=$ das Element $z \in Z_p$, sodaß $y \otimes z = x$; dieses z kann mit dem Euklid'schen Algorithmus bestimmt werden.)

Gesucht: $p_1,...,p_t$ ... irreduzible Polynome mit Koeffizienten in Z_p

sodaß $f = \Pi_{i=1,...,t}\ p_i$. ∎

Zusätzliches mathematisches Wissen (Berlekamp 1969):
(Faktorentrennung)

Seien $p_1,...,p_t$ die irreduziblen Faktoren eines Polynoms f über Z_p und sei v ein Polynom mit folgender Eigenschaft (ein "Trennpolynom"):

Grad von v < Grad von f und
f teilt v^p - v (FT1)

Dann gilt:

Jeder irreduzible Faktor p_j von f teilt eines der Polynome v-0, v-1, ..., v-(p-1). (FT2)

Außerdem:

Es gibt $s_1,...,s_t \in Z_p$, sodaß
für alle i = 1,...,t: p_i teilt $(v-s_i)$ und
für alle i,j = 1,...,t mit $s_i \neq s_j$:
p_i teilt den größten gemeinsamen Teiler von f und $v-s_i$,
p_j teilt den größten gemeinsamen Teiler von f und $v-s_i$ nicht.
($v-s_i$ "trennt" also p_i und p_j!)

(Vektorraum der Trennpolynome)

Die Trennpolynome für f bilden einen Vektorraum. ∎

Der Beweis dieser Hilfssätze ist nicht schwer (unter Verwendung einiger grundliegender Rechengesetze zum Rechnen modulo p). Mit Hilfe des Wissens (Vektorraum der Trennpolynome) und einigen leichten Beweisschritten kann man zeigen, daß man eine Basis $v^{[1]},...,v^{[r]}$ für den Vektorraum aller (Koeffizientenvektoren der) Trennpolynome durch den Gauß'schen Algorithmus als Basislösungsvektoren aus folgendem homogenen linearen Gleichungssystem erhält:

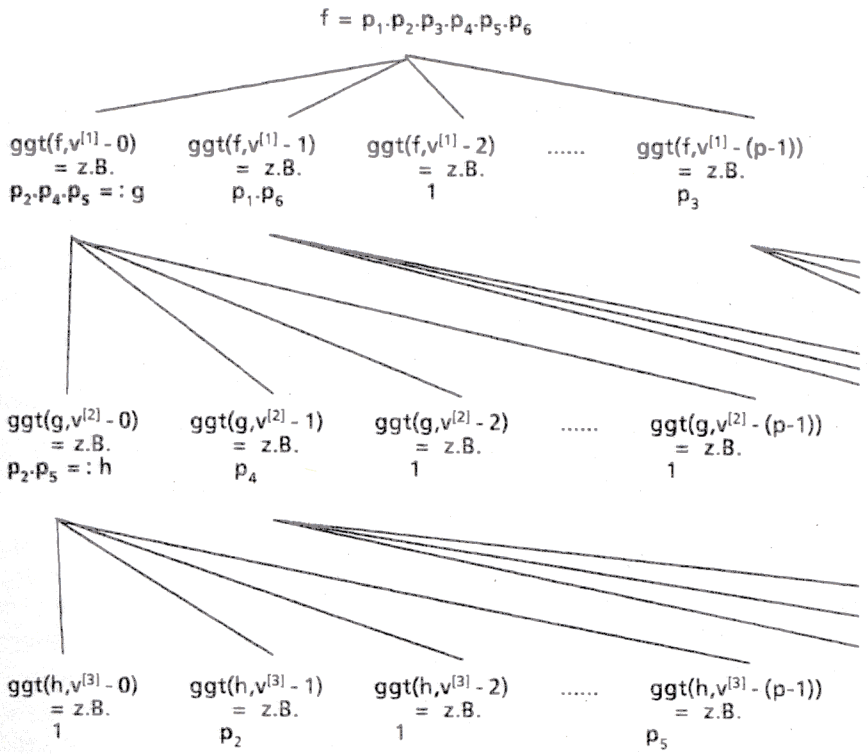
$v.(Q - I) = 0$,

wobei I die Einheitsmatrix ist und Q eine Matrix ist, deren Elemente $Q_{k,\ell}$ wie folgt gebildet werden:

$Q_{k,\ell}$:= der Koeffizient, der bei der Division von $x^{p(k-1)}$ durch f bei der Potenz $x^{\ell-1}$ steht ($1 \le k,\ell \le n$, n: = Grad von f).

(In der Tat kann man auch zeigen, daß die Anzahl r der linear unabhängigen Basisvektoren gleich der Anzahl r der Faktoren von f ist.)

Die Kenntnis der durch die Koeffizientenvektoren $v^{[1]},...,v^{[r]}$ bestimmten Trennpolynome (deren Bestimmung durch den Gauß'schen Algorithmus in polynomialer, nämlich kubischer Zeit möglich ist) ermöglicht nun im wesentlichen unter Anwendung des Wissens (FT1) und (FT2) die Bestimmung der Primfaktoren durch folgenden "Faktorentrennvorgang", den wir zunächst anschaulich erklären ("ggt" steht für "größten gemeinsamen Teiler"):



D.h. die einzelnen Primfaktoren von f werden nach und nach durch Bildung des grössten gemeinsamen Teilers mit den Trennpolynomen $v^{[1]},...,v^{[r]}$ wie in einer Kaskade mit "Trennfiltern" getrennt. Die genauen Überlegungen, warum diese Kaskade, im wesentlichen auf der Grundlage des Wissens (FT2) und (FT3), die Trennung tatsächlich immer leistet, können wir hier aus Platzgründen nicht geben. Der geübte Leser ist vielleicht in der Lage, die Detailüberlegungen in die obige Skizze einzufüllen. Zusammenfassend ergibt sich folgender Algorithmus, dessen Komplexität im wesentlichen von der Ordnung $O(pn^3)$ ist, wobei n der Grad des Eingabepolynoms f ist.

Algorithmus (Berlekamp 1969)
zur Faktorisierung von quadratfreien Polynomen über Z_p:
(Bestimmung von Trennpolynomen)

Bestimme wie oben angegeben die Matrix Q
und dann mit dem Gauß'schen Algorithmus eine Basis für den Vektorraum aller Lösungen der homogenen linearen Gleichung $v(Q - I) = 0$. Sei r die Anzahl der Vektoren in der Basis und seien $v^{[1]},...,v^{[r]}$ die Basisvektoren selbst.

(Trennen der Primfaktoren)

F := {f} (Menge der bereits bekannten Faktoren)

Falls r=1 (f ist irreduzibel):

$p_1 := f$.

Falls r>1 (f zerfällt in Primfaktoren):

Für j := 2,...,r:

Für alle h∈F:

Für s := 0,...,p-1 :

g := ggt(h,$v^{[j]}$-s).

Füge g zu F hinzu.

Streiche aus F alle Polynome, die Vielfaches von einem anderen Polynom in F sind. Falls F jetzt genau r Faktoren enthält, gehe aus der Schleife.

Als $p_1,...,p_r$ kann man nun die Polynome in F nehmen. ∎

Beispiel (aus /Knuth 1969, S.424/):

Zu Faktorisieren sei das Polynom $f:=x^8+x^6+10x^4+10x^3+8x^2+2x+8$ über Z_{13}. Wir bestimmen zuerst die Matrix Q. Die erste Reihe von Q ist (1,0,...,0), weil x^0 dividiert durch f wieder x^0 ist. Die nächste Reihe ist (2,1,7,11,10,12,5,11), weil x^{13} dividiert durch f gleich $(11x^7+5x^6+12x^5+10x^4+11x^3+7x^2+x+2)$ ist (alle Rechnungen sind über Z_{13} durchzuführen!). Genau so bestimmt man die weiteren Zeilen von Q durch Division von x^{26}, x^{39} etc. durch f. (In der Tat kann man das Ergebnis für x^{k+1} durch sehr einfache Rechnung aus dem Ergebnis für x^k erhalten!) Insgesamt erhält man so

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 11 & 10 & 12 & 5 & 11 \\ 3 & 6 & 4 & 3 & 0 & 4 & 7 & 2 \\ 4 & 3 & 6 & 5 & 1 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 11 & 8 & 8 & 3 & 1 & 3 & 11 \\ 6 & 11 & 8 & 6 & 2 & 7 & 10 & 9 \\ 5 & 11 & 7 & 10 & 0 & 11 & 7 & 12 \\ 3 & 3 & 12 & 5 & 0 & 11 & 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

Durch Anwenden des Gauß'schen Algorithmus erhält man z.B. die folgenden drei linear unabhängigen Lösungsvektoren für das Gleichungssystem v.(Q - I)=0:

$v^{[1]}$ = (1 0 0 0 0 0 0 0),

$v^{[2]}$ = (0 5 5 0 9 5 1 0),

$v^{[3]}$ = (0 9 11 9 10 12 0 1).

Diese Vektoren spannen den gesamten Lösungsraum auf. Es gibt genau so viele irreduzible Faktoren von f als linear unabhängige Lösungsvektoren im Lösungsraum von v.(Q - I)=0, also 3. Man berechnet nun den ggT(f,$v^{[2]}$ - s) für 0≤s<13, wo $v^{[2]}$

$= x^6+5x^5+9x^4+5x^2+5x$. ($v^{[1]}$ braucht man nicht zu betrachten!) Das ergibt

$f_1 := x^5+5x^4+9x^3+5x+5$ für s=0 und

$f_2 := x^3+8x^2+4x+12$ für s=2.

Alle anderen ggT sind 1. Damit hat man zwei Faktoren und muß noch ggT(f_1,$v^{[3]}$ -s) betrachten für 0≤s<13, wo $v^{[3]} = x^7+12x^5+10x^4+9x^3+11x^2+9x$. Das ergibt

$f_3 := x^4+2x^3+3x^2+4x+6$ für s=6 und

$f_4 := x+3$ für s=8.

Alle anderen ggT sind wieder 1. f_1 kann man jetzt streichen. Die vollständige Faktorisierung von f ist also

$f=(x^4+2x^3+3x^2+4x+6)(x^3+8x^2+4x+12)(x+3)$.

5.5 Die Methode der Gröbner-Basen für Probleme mit Systemen multivariater Polynome

Allgemeine Strategie:

Gegeben sei eine (endliche) Menge F von multivariaten Polynomen mit Koeffizienten aus einem Körper (z.B. Q). In der algebraischen Geometrie (die u.a. die mathematischen Grundlagen für CAD, Computer-Geometrie, geometrische Probleme der Roboterprogrammierung etc. liefert) studiert man die Lösung verschiedener grundlegender Probleme für solche Polynommengen F: z.B. die Bestimmung aller Lösungen des durch F gegebenen Systems algebraischer Gleichungen (die Lösungen mögen dabei in gewissen Erweiterungskörpern liegen); die Zerlegung der Lösungsmannigfaltigkeit des Gleichungssystems in "irreduzible" Teilmannigfaltigkeiten (Problem der "Primärdekomposition", das als eine Verallgemeinerung des Faktorisierungsproblems univariater Polynome betrachtet werden kann; geometrisch entspricht das der Zerlegung geometrischer Gebilde in einfachste Teilgebilde); Aussagen über die Dimension der Lösungsmannigfaltigkeit; Bestimmung einer endlichen Basis für den "Modul" aller Polynomlösungen von linearen Gleichungen, die als Koeffizienten die Polynome aus F haben; vollkommene Beherrschung der Arithmetik in den algebraischen Bereichen, die aus dem Grundkörper durch Hinzunahme der Lösungen von Gleichungssystemen F entsteht; usw.

Mit der Methode der Gröbner-Basen werden diese Probleme in folgenden zwei Schritten gelöst:

1. Transformation der gegebenen Polynommenge F in eine "Standardform" G (eine *"Gröbner-Basis"*), ohne die wesentlichen algebraischen Eigenschaften (z.B. die Lösungsmannigfaltigkeit) von F zu verändern.

2. Lösung des entsprechenden Problems für G (wobei die Lösung der angeführten Probleme für Gröbner-Basen meist "leicht" ist im Vergleich zur Lösung für beliebige F).

Die Methode der Gröbner-Basen wurde in /Buchberger 1965,1970/ eingeführt und seither in einer Reihe von Arbeiten weiter ausgebaut. Für eine Zusammenfassung mit ausführlichen Literaturhinweisen siehe /Buchberger 1985/.

Definitionen:
(Im folgenden verwenden wir folgende Variablen:
f,g,h ... Polynome mit n Variablen und Koeffizienten aus einem Grundkörper K,
F,G ...(endliche) Mengen von Polynomen,
a,b,c ... Elemente aus dem Grundkörper,
s,t,u,v ... Potenzprodukte (das sind spezielle Polynome der Gestalt $x_1^{i1}...x_n^{in}$,
z.B. $x_1^3x_2x_3^5x_4^2$))

(Reduktion):
$g \rightarrow_F h$ (lies: g *reduziert* modulo F auf h) : $\Leftrightarrow$
es existiert ein $f \in F$ und ein Potenzprodukt t, das in g vorkommt, sodaß
t ein Vielfaches u.s des größten Potenzproduktes s von f ist
und $h = g - (a/b).u.f$, wobei
a der Koeffizient von t in g ist und
b der führende Koeffizient von f ist. ∎

(Die Begriffe "größtes Potenzprodukt" und "führender Koeffizient" beziehen sich dabei auf eine fixe totale Ordnung der Potenzprodukte, die in gewissen Grenzen willkürlich gewählt werden kann. Z.B. ist - für drei Variable x,y,z - eine mögliche Anordnung: $1,x,y,z,x^2,xy,xz,y^2,yz,z^2,x^3,...$. D.h. es wird hier zuerst nach dem Grad und innerhalb eines Grades lexikographisch geordnet.)

Beispiel: $F := \{2x^2y - x + 1, xy^2 + 3y\}$, $g := x^3y^2 - 5x^2y^2 + 3x$:
$g \rightarrow_F h_1 := x^3y^2 - 5/2\,xy + 5/2\,y + 3x$ (mit $f := 2x^2y - x + 1$ und $t := x^2y^2$).
Aber auch $g \rightarrow_F h_2 := x^3y^2 + 15xy + 3x$ (mit $f := xy^2 + 3y$ und $t := x^2y^2$).

(Zum Vergleich: Ein Schritt in der Division eines univariaten Polynoms g durch ein Polynom f ist ein Spezialfall des obigen sehr allgemeinen Reduktionsschrittes. Während jedoch fortgesetzte Divisionsschritte bei der bekannten univariaten Division zu einem eindeutigen "Rest" führen, kommt man durch fortgesetzte Reduktion ausgehend von einem multivariaten f im allgemeinen zu vielen verschiedenen "Resten", d.h. Polynomen, die modulo F nicht mehr weiter reduziert werden können.

Sicher ist lediglich, daß jede fortgesetzte Reduktion nach endlich vielen Schritten abbricht, wie man unschwer beweisen kann.)

(Gröbner-Basen)
Eine (endliche) Polynommenge F ist eine *Gröbner-Basis* :$\Leftrightarrow$
für alle Polynome g:
bei fortgesetzter Reduktion von g modulo F entsteht immer derselbe Rest.

Beispiel: Das F im vorherigen Beispiel ist keine Gröbner-Basis, denn z.B. $g := x^2y^2$ reduziert auf die zwei verschiedenen Reste $h_1 := \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}y$ und $h_2 := -3xy$. (Überlege anhand der Definition (Reduktion), daß weder h_1 noch h_2 weiter reduzierbar sind modulo F.)

Beispiel eines Problems, das man mit Gröbner-Basen lösen kann: Systeme von algebraischen Gleichungen.
Gegeben: F ... eine endliche Menge von Polynomen in n Variablen über einem Körper K (z.B. $\mathbb{Q}$).
Gesucht: 1. Entscheide, ob F (in einem geeigneten Erweiterungskörper E des Grundkörpers, z.B. in $\mathbb{C}$) lösbar ist.
2. Falls F lösbar ist, entscheide, ob F endlich viele oder unendlich viele Lösungen hat.
3. Falls F endlich viele Lösungen hat, Bestimmung aller Lösungen von F.
(Eine Lösung von F ist dabei ein n-Tupel $(a_1,...a_n)$ von Elementen aus E, sodaß für alle $f \in F$: $f(a_1,...,a_n) = 0$.)

Mathematisches Wissen:
Für Gröbner-Basen gilt:
(GB: Lösbarkeit)
Das durch G bestimmte Gleichungssystem ist lösbar (im algebraischen Abschluß des Grundkörpers) $\Leftrightarrow$ In G kommt kein konstantes Polynom vor.
(GB: Endliche Lösungsmenge)
Das durch G bestimmte Gleichungssystem hat nur endliche viele Lösungen (im algebraischen Abschluß des Grundkörpers) $\Leftrightarrow$ Für alle $i = 1,...,n$ existiert ein e, sodaß x_i^e kommt als größtes Potenzprodukt in einem der $g \in G$ vor.
(GB: Elimination)
(Falls die Potenzprodukte lexikographisch angeordnet werden ohne Berücksichtigung des Grades, wobei x_1 vor x_2, x_2 vor x_3, ..., x_{n-1} vor x_n kommen möge und falls G nur endlich viele Lösungen besitzt:)
G enthält einige Polynome $g_1^{(1)},g_2^{(1)},...,g_{k1}^{(1)}$, welche nur von x_1 abhängen,
darunter ein Polynom niedrigsten Grades, von dem alle anderen Vielfache sind,

G enthält einige Polynome $g_1^{(2)},g_2^{(2)},...,g_{k2}^{(2)}$, welche nur von x_1,x_2 abhängen,

...

G enthält einige Polynome $g_1^{(n)},g_2^{(n)},...,g_{kn}^{(n)}$, welche von $x_1,x_2,...,x_n$ abhängen.

(Diese Aussagen könnte man, unter Verwendung von mehr algebraischer Terminologie, viel genauer machen. Die Beobachtung (GB: Elimination) wurde das erstemal in /Trinks 1978/ gemacht. Eine Alternative dazu, die für beliebige Anordnungen der Potenzprodukte gilt, findet sich in /Buchberger 1970/.)

Aus diesem Wissen ergibt sich folgender "Algorithmus" zur Lösung des obigen Problems:

Algorithmus:

(Gröbner-Basis herstellen)

Transformiere die gegebene Menge F in eine zugehörige Gröbner-Basis G.

(Endlichkeit der Lösungsmenge testen)

Falls für ein $i=1,...,n$ kein Potenzprodukt der Gestalt x_i^e unter den höchsten Potenzprodukten der $g \in G$ vorkommt:

Antwort "F hat unendlich viele Lösungen".

(Endlich viele Lösungen bestimmen)

Wähle das Polynom g niedrigsten Grades in G, welches nur von x_1 abhängt und bestimme alle Nullstellen des Polynoms.

Für alle Nullstellen a_1 von g:

Setze a_1 in alle übrigen Polynome von G ein. Man erhält ein Gleichungssystem in (n-1) Variablen, das man rekursiv nach derselben Methode lösen kann. Jede Lösung $(a_2,...,a_n)$ dieses Gleichungssystems kann man mit a_1 zusammensetzen zu einer Lösung $(a_1,...,a_n)$ von G (und damit F). ∎

Der letzte Schritt (Endlich viele Lösungen bestimmen) läßt sehr viele Varianten und Verfeinerungen zu, die für die Effizienz und praktische Durchführung wichtig sind, auf die wir hier aber unmöglich eingehen können. Wir haben "Algorithmus" mit Anführungszeichen geschrieben, weil wir vom ersten Schritt (Gröbner-Basis herstellen) ja noch nicht gezeigt haben, ob er tatsächlich algorithmisch durchführbar ist. In der Tat gibt es einen einfachen, inkonstruktiven Existenzbeweis für Gröbner-Basen, der in seiner Idee für den analogen Fall der Standard-Basen bei Potenzreihen bereits (/Hironaka 1964/) vor Einführung der Gröbner-Basen bekannt war. Dieser Beweis geht im wesentlichen so: Man wählt als Gröbner-Basis G zu F

$G := \{g \in Ideal(F) \mid g$ kann nicht durch ein anderes Polynom $f \in Ideal(F)$ reduziert werden$\}$

und zeigt alle gewünschten Eigenschaften. Hier ist Ideal(F) das durch "F erzeugte Polynomideal" (zu diesem Begriff siehe die Algebra-Lehrbücher). Dieser Beweis gibt aber keine Möglichkeit zur algorithmischen Bestimmung von Gröbner-Basen, denn man müßte "alle" (unendlich vielen) $g \in Ideal(F)$ durchsuchen und für jedes solche g für die unendlich vielen f untersuchen, ob g durch f reduziert werden kann oder nicht. Erst das folgende zusätzliche mathematische Wissen erlaubt die algorithmische Konstruktion von Gröbner-Basen:

Mathematisches Wissen (Buchberger 1965):

(Endliche Charakterisierung von Gröbner-Basen)

Sei "Rest(f,F) ein Algorithmus, der durch Iterieren des Reduktionsschrittes ein beliebiges Polynom f modulo einem beliebigen F zu einem Rest (nicht mehr weiter reduzierbaren Polynom) reduziert. Dann gilt:

G ist eine Gröbner-Basis $\Leftrightarrow$

Für alle $g_1,g_2 \in G$: Rest(S-Polynom(g_1,g_2),G) = 0.

(Hier ist das "S-Polynom von g_1 und g_2" wie folgt definiert:

$$S\text{-Polynom}(g_1,g_2) = a_2.(kgV(s_1,s_2)/s_1).g_1 - a_1.(kgV(s_1,s_2)/s_2)).g_2,$$

wobei a_i der führende Koeffizient von g_i

und s_i das höchste Potenzprodukt von g_i ist $(i=1,2)$;

kgV steht für "kleinstes gemeinsames Vielfaches".) ∎

Der Beweis dieses Satzes ist bedeutend schwieriger als der inkonstruktive Existenzbeweis und ist im wesentlichen kombinatorisch, siehe /Buchberger 1965,1970/. Man beachte, das dieses Wissen nunmehr eine algorithmische Charakterisierung der Gröbner-Basen erlaubt, denn es ist nur mehr der Test von *endlich vielen* Paaren $\{g_1,g_2\}$ von Polynomen notwendig und jeder einzelne Test besteht einfach in der Anwendung von zwei Algorithmen, nämlich "S-Polynom" und "Rest". Das obige Wissen gestattet aber nicht nur einen algorithmischen Test, ob eine gegebene Polynommenge G eine Gröbner-Basis ist, sondern auch die Konstruktion von Gröbner-Basen G zu beliebig vorgegebenen Polynommengen F. Genauer kann man damit folgendes Problem algorithmisch lösen:

Problem:

Gegeben: F ... eine endliche Menge multivariater Polynome.

Gesucht: G ... eine endliche Menge multivariater Polynome,

sodaß F und G dasselbe Ideal erzeugen (und damit insbesondere dieselbe Lösungsmenge haben) und G eine Gröbner-Basis ist. ∎

Algorithmus (Buchberger 1965):

G := F

$B := \{\{f_1,f_2\} \mid f_1,f_2 \in G,\ \neg(f_1 = f_2)\}$
while $B \neq \emptyset$ do
    $\{f_1,f_2\} :=$ ein Paar aus B
    $B := B - \{\{f_1,f_2\}\}$
    $h :=$ Rest(S-Polynom(f_1,f_2),G)
    if $h \neq 0$ then
        $B := B \cup \{\{g,h\} \mid g \in G\}$
        $G := G \cup \{h\}$ ∎

Der Block nach der Abfrage "h≠0?" sorgt dafür, daß, wenn ein S-Polynom nicht auf 0 reduziert, der entsprechende Rest zur Basis hinzugenommen wird, um damit die Reduktion auf 0 zu erzwingen. Es ist ein nicht-triviales Problem zu beweisen, daß diese "Vervollständigung" der Basis nur endlich oft geschehen kann, der Algorithmus also nach endlich vielen Schritten abbricht. (Eine kombinatorisch befriedigende Lösung dieses Problems ist mit dem Lemma von /Dickson 1913/ möglich.) Auch dieser Algorithmus läßt viele Varianten und Verfeinerungen zu.

Beispiel:
Für das folgende Gleichungssystem $F := \{4x^2+xy^2 - z+\frac{1}{4},\ 2x+y^2z+\frac{1}{2},\ x^2z - \frac{1}{2}x - y^2\}$ ergibt sich durch Anwenden des obigen Algorithmus als zugehörige Gröbner-Basis G (wenn man z vor y vor x anordnet):

$G := \{ z^7 - 1/2\, z^6 + 1/16\, z^5 + 13/4\, z^4 + 75/16\, z^3 + 171/8\, z^2 + 133/8\, z - 15/4,$
$y^2 - 19188/497\, z^6 + 318/497\, z^5 - 4197/1988\, z^4 - 251555/1988\, z^3 - 481837/1988\, z^2 + 1407741/1988\, z - 297833/994,$
$x + 4638/497\, z^6 - 75/497\, z^5 + 2111/3976\, z^4 + 61031/1988\, z^3 + 232833/3976\, z^2 - 85042/497\, z + 144407/1988 \}$

(Man beachte: alle Schritte in obigem Algorithmus sind über dem ursprünglichen Grundkörper, z.B. Q, möglich. Bis hierher ist also noch keine Körpererweiterung notwendig!)

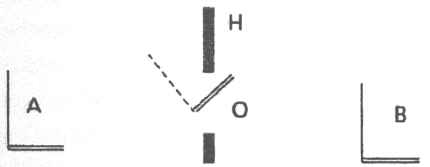
Ein Gleichungssystem dieser Art kann man durch "sukzessive Elimination" lösen wie im Schritt (Endlich viele Lösungen bestimmen) beschrieben. Hier beachte man aber, daß man nun entweder numerisch rechnen muß (d.h. mit Gleitkommazahlen und damit mit Rundungsfehlern, die sich beim Einsetzen in die nächsten Gleichungen fortpflanzen) oder man muß in entsprechenden Körpererweiterungen algebraisch weiterrechnen. Für letzteres sind die algorithmischen Techniken zwar bekannt, siehe /Loos 1982/ für eine Übersicht und zum Teil neue Algorithmen, im allgemeinen ist das Rechnen in algebraischen Körpererweiterungen jedoch relativ aufwendig. Die Berechnung von Gröbner-Basen selbst ist grundsätzlich ein aufwendiges

Problem, da sich, wie anfangs erwähnt, viele sehr komplexe Probleme, nämlich "inhärent" komplexe Probleme, auf die Berechnung von Gröbner-Basen zurückführen lassen. Man muß bei solchen Problemen mit "exponentiellen" Rechenzeiten rechnen (siehe /Mair,Meyer 1981/). Trotzdem ist noch ein weites Feld für praktische Verbesserungen offen, insbesondere in der Kombination dieser algebraischen Techniken mit numerischen. Ein weiteres Beispiel wurde im Abschnitt *"Problemlösepotenz von Computer-Algebra-Systemen: Einige Beispiele"* gegeben, welches zeigt, daß man Gröbner-Basen auch für Gleichungssysteme mit "Parametern" berechnen kann, was grundsätzlich den Bereich der numerischen Mathematik übersteigt.

5.6 Der Collins-Algorithmus zur zylindrisch-algebraischen Dekomposition

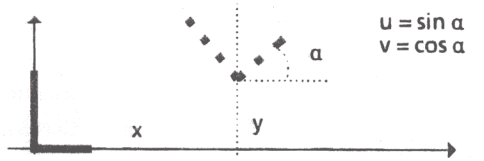
Motivation:

In der Roboter-Programmierung ist eines der (derzeit wichtigsten) Probleme die Bestimmung von kollisionsfreien Wegen von Objekten in der Gegenwart von Hindernissen. Ein sehr einfaches Beispiel einer solchen Aufgabe (in der Ebene) ist:

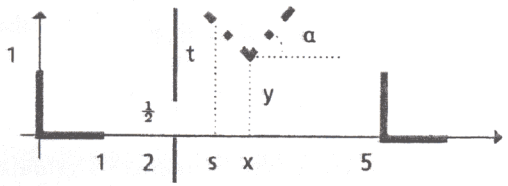


Das Objekt L soll von der Position A durch die Öffnung O hindurch in die Position B gebracht werden, ohne mit dem Hindernis H zu kollidieren.

Jede Zwischenposition des Objektes kann durch die Translation des Objektemittelpunkes von der Ausgangslage und durch (z.B. Sinus und Cosinus des) Drehwinkels gegenüber seiner Ausgangsorientierung beschrieben werden:



also im wesentlichen durch vier Zahlen x,y,u,v (mit der Zusatzbedingung $u^2+v^2=1$). Betrachten wir z.B. folgende konkrete Angaben für obiges Problem:



Die Eigenschaft "das Objekt kollidiert in der durch x,y,u,v bestimmten Position nicht

mit dem Hindernis" kann durch folgende Formel beschrieben werden:

$$F := \neg(\exists s,t)\,(B'(s,t,x,y,u,v) \wedge H(s,t))$$

d.h. kein Punkt liegt zugleich auf dem Objekt in der durch x,y,u,v bestimmten Position und dem Hindernis, wobei

$$B'(s,t,x,y,u,v) := (\exists s',t')\,(B(s',t') \wedge (s,t)=(s',t').\begin{pmatrix} v & u \\ -u & v \end{pmatrix}+(x,y) \wedge u^2+v^2=1)$$

d.h. ein Punkt liegt auf dem Objekt in der durch x,y,u,v bestimmten Position, wenn er aus einem Punkt des Objektes in Ausgangslage durch Anwendung der durch x,y,u,v bestimmten Transformation entsteht, wobei

$$B(s',t') := (0 \le s' \le 1 \wedge t'=0) \vee (s'=0 \wedge 0 \le t' \le 1)$$

und

$$H(s,t) := (s=2 \wedge (t' \le 0 \vee t' \ge \tfrac{1}{2}))$$

Es kann nun gezeigt werden, siehe /Schwarz,Sharir 1982/, daß das Problem, einen kollisionsfreien Weg zu finden (d.h. (x,y,u,v) durch eine stetige Transformation von der Ausgangsposition (0,0,0,1) in die Endposition (5,0,0,1) überzuführen), reduziert werden kann auf das Problem, eine "zylindrisch-algebraische Dekomposition" des $\mathbb{R}^m$ bzw. $\mathbb{R}^k$ zu finden. (m ist die Anzahl der in F vorkommenden Variablen, in unserem Beispiel m=6; k ist die Anzahl der in F vorkommenden freien Variablen, in unserem Beispiel k=4; nämlich x,y,u,v sind frei.) Die zylindrisch-algebraische Dekomposition muß dabei für die in F vorkommenden Polynome "vorzeicheninvariant" sein. (Um kein Mißverständnis aufkommen zu lassen: Man beachte, daß es hier um eine Dekomposition des $\mathbb{R}^m$ bzw. $\mathbb{R}^k$ geht und nicht um eine Dekomposition des $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$, in welchem sich die ursprünglichen Objekte befinden!). Dann muß man folgende Schritte ausführen:

1. Bestimme die "Zelle" A der Dekomposition von $\mathbb{R}^k$, in welcher die Ausgangsposition liegt.
2. Bestimme die "Zelle" E, in welcher die Endposition liegt.
3. Entscheide, ob es eine Folge von Zellen $C_1,\ldots,C_k$ gibt, sodaß alle C_i die Formel F "erfüllen" (d.h. nur Positionen enthalten, die nicht kollidieren), (für i=1,...,k)
   $C_1 = A$, $C_k = E$,
   C_i ist zu C_{i+1} "benachbart" (für i=1,...,k-1).
4. Wenn es keine solche Folge gibt:
   Antworte "Es existiert kein kollisionsfreier Pfad".
5. Wenn es eine solche Folge gibt:
   Konstruiere einen Pfad durch die Zellen $C_1,\ldots,C_k$.

Man sieht hier, daß die Konstruktion von "zylindrisch-algebraischen Dekompositionen" für höherdimensionale Räume zu einem zentralen Problem wird. In der Tat

lassen sich noch eine ganze Reihe von anderen grundliegenden Problemen der Roboterprogrammierung auf diese Konstruktion zurückführen.

Viel allgemeiner läßt sich diese Konstruktion verwenden, um eine beliebige Formel der "Theorie der reell abgeschlossenen Körper" in eine äquivalente quantorenfreie Formel umzuwandeln und dann für konkrete Werte der freien Variablen zu entscheiden. Die Formeln dieser Theorie sind aber allgemein genug, um eine ungeheure Fülle von interessanten Sätzen über (geometrische) Sachverhalte im $\mathbb{R}^n$ auszudrücken. Unter anderem sind Aussagen über die Lösbarkeit in $\mathbb{R}$ von beliebigen algebraischen Gleichungs- und Ungleichungssystemen in dieser Theorie möglich. Der Begriff der "zylindrisch-algebraischen Dekomposition" und ein Algorithmus zur Konstruktion solcher Dekompositionen wurde 1973 von G. Collins eingeführt, siehe /Arnon,Collins,McCallum 1984/ für die neueste und ausführlichste Version. Der Collins'sche Algorithmus ist beweisbar besser (d.h. komplexitätsordnungsmäßig besser) als ein älteres Verfahren von /Tarski 1948/. Der Collins'sche Algorithmus löst wohl eine der allgemeinsten Problemstellungen der Computer-Algebra und greift in seinen algorithmischen Details auf faktisch alle anderen algebraischen Algorithmen zurück. Er war und ist somit sicher einer der für die Entwicklung der Computer-Algebra wichtigsten Algorithmen. Seine praktische Relevanz für eine breite Klasse von modernen Ingenieurproblemen wird erst in den allerletzten Jahren erkannt und es ist zu erwarten, daß in nächster Zeit aufbauend auf diesem Verfahren einige Durchbrüche in der Anwendung erzielt werden. Im Augenblick setzt die große Komplexität des Verfahrens der Anwendung noch Grenzen.

Wir geben jetzt eine Formulierung des durch den Collins-Algorithmus gelösten Problems und dann eine sehr grobe Skizze des Algorithmus und des zugrundeliegenden mathematischen Wissens.

Problem:

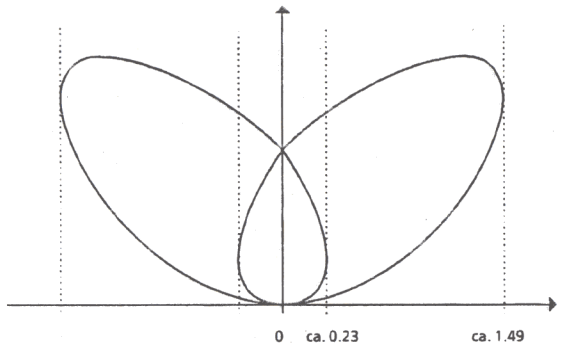
Gegeben: A ... eine Menge von Polynomen (in r Variablen) mit ganzzahligen Koeffizienten.

Gesucht: I ... eine endliche Menge von (Beschreibungen für) "Zellen" (zusammenhängende Punktmengen) im $\mathbb{R}^r$,

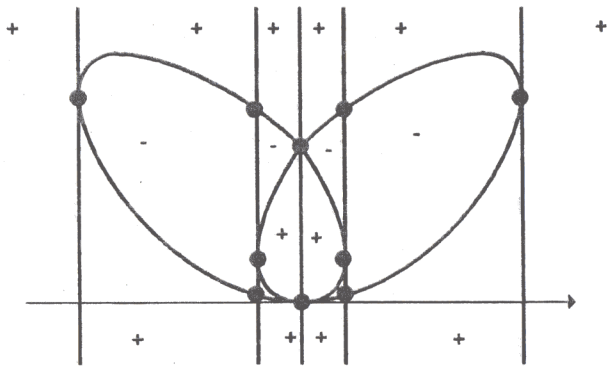
sodaß die Zellen von I zusammen eine "zylindrisch-algebraische Dekomposition" des $\mathbb{R}^r$ ergeben , auf welcher alle Polynome von A "vorzeicheninvariant" sind. ∎

Bevor wir die Definitionen für wenigstens einige der vorkommenden Begriffe angeben, geben wir folgendes

Beispiel (aus /Arnon,Collins,McCallum 1984/):
Sei $A := \{y^4 - 2y^3 + y^2 - 3x^2y + 2x\}$. Das Nullstellengebilde von A hat in etwa folgende Gestalt:



Eine zugehörige "zylindrisch-algebraische Dekomposition" des $\mathbb{R}^2$, auf welcher A "vorzeicheninvariant" wäre, besteht aus folgenden Zellen: den dick gezeichneten Punkten, den Kurvenstücken, sowie den zusammenhängenden weissen Flächen zwischen den Punkten und Kurvenstücken in folgender Zeichnung:



Man beachte, daß das obige Problem nicht einfach durch numerisches, approximatives Ausrechnen von Punkten der Kurve an einigen Stellen gelöst werden kann, weil es hier um globale Eigenschaften der Kurve geht, z.B. Anzahl der Zellen, Nachbarschaft von Zellen, etc. Ein noch so leichtes "Verrutschen" von Werten, z.B. Verschieben einer der eingezeichneten vertikalen Linien würde diese Eigenschaften drastisch verändern. Eine Möglichkeit, mit irrationalen Zahlen im Computer zu rechnen, ist die Darstellung von solchen Zahlen (falls sie "algebraisch" sind, d.h. einer Polynomgleichung mit rationalen Koeffizienten genügen) durch Angabe eines Intervalls mit rationalen Endpunkten, in welchem die Zahl liegt, und eines Polynoms, welches

diese Zahl als Wurzel hat (siehe z.B. /Loos 1982/). So kann z.B. $\sqrt{2}$ durch die Intervallendpunkte 1 und 2 und durch das Polynom $x^2 + 0x - 2$ dargestellt werden, d.h. insgesamt durch die 5 rationalen Zahlen (1,2,-2,0,1). Diese Information ist endlich und bestimmt $\sqrt{2}$ eindeutig (d.h. keine andere reelle Zahl liegt im Intervall (1,2) und erfüllt das Polynom $x^2 - 2$). Für das Rechnen mit so dargestellten reellen Zahlen muß man dann Algorithmen angeben, die aus den Darstellungen von zwei reellen Zahlen die Darstellung der Summe dieser beiden Zahlen rechnen etc. (Allerdings kann man hier wesentliche Vereinfachungen treffen, die darauf hinauslaufen, daß man das darstellende Polynom nicht jedesmal neu berechnen muß.) Auch ist ein Problem, wie man nun die einzelnen Zellen (oder wenigstens die interessierenden Eigenschaften der Zellen) einer vorzeicheninvarianten zylindrisch-algebraischen Dekomposition durch ein endliches Stück an Information darstellen kann. Solche Informationen sind z.B.

Die Angabe eines "*Testpunktes*" $a \in \mathbb{R}^r$, der in der Zelle liegt, und dessen Komponenten sämtlich algebraische Zahlen sind. (Für viele Fragen genügt diese Darstellung, z.B. für die Frage, ob eine Zelle C eine Formel F erfüllt - weil wegen der Vorzeicheninvarianz die Erfüllung der Formel ja nicht vom gewählten Punkt innerhalb der Zelle abhängt.)

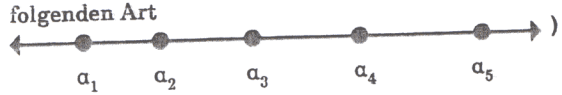
Die Angabe, durch welche Vereinigungs-, Durchschnitts- und Komplementbildung die Zellen aus Mengen der Art
$\{x \in \mathbb{R}^r \mid A(x) \geq 0\}$, wo A ein Polynom ist,
gebildet werden kann (Darstellung der Zellen als "*semialgebraische*" Mengen).

Die Angabe systematischer Namen ("*Indizes*") für Zellen und die Angabe, welche der so benannten Zellen in den Zylindern übereinander liegen und welche Zellen mit welchen benachbart sind.

Definitionen:
Ein Polynom (in r Variablen) A heißt auf einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}^r$ *vorzeicheninvariant* :$\Leftrightarrow$
für alle $(a_1,...,a_r) \in M$: $A(a_1,...,a_r) > 0$ oder
für alle $(a_1,...,a_r) \in M$: $A(a_1,...,a_r) = 0$ oder
für alle $(a_1,...,a_r) \in M$: $A(a_1,...,a_r) < 0$.

Eine Dekomposition D (Partition) von $\mathbb{R}^r$ ist eine *zylindrische Dekomposition* von $\mathbb{R}^r$
:$\Leftrightarrow$ Entweder $r = 1$ und
D besteht aus
$(-\infty,a_1), \{a_1\}, (a_1,a_2), \{a_2\}, (a_2,a_3), ..., (a_{k-1},a_k), \{a_k\}, (a_k,\infty)$
für gewisse reelle Zahlen $a_1 < a_2 < ... < a_k$

(d.h. D besteht aus offenen Intervallen und einzelnen Punkten in der folgenden Art



oder r>1 und

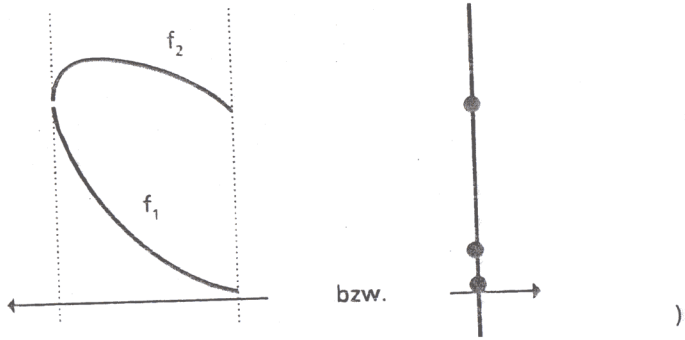
D ist die Vereinigung von "Stacks" S_i, die zu den "Zylindern" $Z(D'_i)$ einer zylindrischen Dekomposition $D'=(D'_1,...,D'_\ell)$ von $\mathbb{R}^{r-1}$ gehören $(i=1,...,\ell)$.

$(Z(M):=M\times\mathbb{R}$ für $M\subseteq\mathbb{R}^{r-1}$. Ein "Stack" S über einer "Zelle" $D'\subseteq\mathbb{R}^{r-1}$ ist eine Dekomposition von Z(D') in die folgenden Mengen

$\{(x,y) \mid x\in D', f_k(x)<y\}$,
$\{(x,f_k(x)) \mid x\in D'\}$,
$\{(x,y) \mid x\in D', f_{k-1}(x)<y<f_k(x)\}$,
$\{(x,f_{k-1}(x)) \mid x\in D'\}$,
$\{(x,y) \mid x\in D', f_{k-2}(x)<y<f_{k-1}(x)\}$,
...
$\{(x,y) \mid x\in D', f_1(x)<y<f_2(x)\}$,
$\{(x,f_1(x)) \mid x\in D'\}$,
$\{(x,y) \mid x\in D', y<f_1(x)\}$,

für gewisse reelle, stetige, auf D' definierte Funktionen $f_1<f_2<...<f_k$, die "Sektionen" des Stacks.

Man gehe die Definition in der Zeichnung durch für
D' = das zweite Intervall von links auf der x-Achse und für
D' = der zweite Einzelpunkt. Es ergeben sich anschaulich die Stacks



)

Sei A eine endliche Menge von Polynomen in r Variablen mit rationalen Koeffizienten und sei PROJ(A) die folgende Menge von Polynomen in (r-1) Variablen:

$$PROJ(A) := \bigcup_{F\in A}\bigcup_{G\in RED(F)}(\{ldcf(F)\}\cup PSC(G,G')) \cup \bigcup_{F1,F2\in A}\bigcup_{G1\in RED(F1),G2\in RED(F2)} PSC(G1,G2)$$

(wobei

ldcf(F) ... der *höchste Koeffizient* des Polynoms F
(ldcf(F) ist ein Polynom in (r-1) Variablen!)

RED(F) ... die Menge der *Redukta* von F, das ist die Menge der Teilpolynome kleineren Grades in F

PSC(F,G) ... die Menge der *Haupt-Subresultanten-Koeffizienten* von F und G, das sind gewisse Unterdeterminanten der Sylvester-Determinante von F und G
(alle Elemente in PSC(F,G) sind Polynome in (r-1) Variablen!))

Eine *zylindrisch-algebraische Dekomposition* von $\mathbb{R}^r$ ist eine zylindrische Dekomposition, bei welcher alle in der Dekomposition vorkommenden Mengen M semialgebraisch sind. ∎

Mathematisches Wissen (Collins 1973ff):

(Intuition: Wie man an obigem Beispiel sieht, sind die "wesentlichen" Stellen, bei denen man die Begrenzungen der zylindrischen Streifen errichten muß, die Stellen, wo das Nullstellengebilde Kreuzungspunkte, Spitzen, isolierte Punkte oder vertikale Tangenten hat. Es geht darum, eine algebraische Charakterisierung dieser wesentlichen Stellen im $\mathbb{R}^r$ zu finden und zu beweisen, daß man damit das Problem eine zylindrisch-algebraische Dekomposition in $\mathbb{R}^r$ zu finden, zurückführen kann auf dasselbe Problem im $\mathbb{R}^{r-1}$. Ein zentrales Instrument dafür ist der folgende Satz.)

Sei nun R eine Zelle einer zylindrisch (algebraischen) Dekomposition von $\mathbb{R}^{r-1}$, auf welcher alle Polynome von PROJ(A) vorzeicheninvariant sind. Dann sind alle Polynome F von A delineierbar (oder identisch 0) über R und für je zwei Polynome $F,G\in A$ gilt: Eine F-Sektion und eine G-Sektion in Z(R) sind entweder disjunkt oder identisch.

(F heißt *delineierbar* über R, wenn der Teil des Nullstellengebildes von F, der in Z(R) liegt, in $k\geq 0$ disjunkte Sektionen, die "F-Sektionen", zerfällt - und damit auf natürliche Weise einen Stack über R erzeugt.) ∎

Dieser Satz gibt die Grundlage für folgenden Algorithmus zur Lösung des Problems der Konstruktion einer zylindrisch-algebraischen Dekomposition I des $\mathbb{R}^r$, die für eine vorgegebene Menge A von Polynomen mit r Variablen vorzeicheninvariant ist:

Algorithmus (Collins 1973ff):

Falls r = 1:

Löse das Problem durch Isolierung der reellen Nullstellen der irreduziblen Faktoren der Polynome in A.

Falls r > 1:

Löse das Problem (durch rekursive Anwendung des Algorithmus) für die Menge PROJ(A) von Polynomen in (r-1) Variablen. Sei I' die dadurch erhaltene zylindrisch-algebraische Dekomposition von $\mathbb{R}^{r-1}$, auf welcher alle Polynome von PROJ(A) vorzeicheninvariant sind.

Für jede Zelle R von I':

Errichte über R den durch A bestimmten Stack

(unter Verwendung des obigen Satzes, dessen Beweis konstruktiv ist).

Nimm diesen Stack in I auf. ∎

(Die sehr komplizierten Details des Algorithmus, die insbesondere ein subtiles Umgehen mit algebraischen Zahlen erfordern, gehen weit über den Rahmen dieser Übersichtsarbeit.)

Übersicht über die Literatur zur Computer-Algebra

Lehrbücher

Es gibt zwei Lehrbücher, die sich vor allem mit den Polynomalgorithmen beschäftigen:

KNUTH D.E., 1969: The Art of Computer Programming - Volume 2 / Seminumerical Algorithms. Addison-Wesley Publishing Company.

LIPSON J.D., 1981: Elements of Algebra and Algebraic Computing. Addison-Wesley Publishing Company.

Das folgende Buch versucht, einen Überblick über das Gesamtgebiet der Computer-Algebra zu geben (Algorithmen aus allen Teilgebieten der Computer-Algebra, Software-Systeme und Anwendungen) und gibt bis 1982 einen ziemlich vollständigen Hinweis auf die Literatur:

BUCHBERGER B., COLLINS G.E., LOOS R.(Hsg.), 1982: Computer Algebra - Symbolic and Algebraic Computation. Springer Verlag.

Ein wirkliches Lehrbuch über Computer-Algebra, das Überblick und Details des gesamten Gebietes bietet, steht jedoch derzeit noch aus. Ein Buch, das einen Eindruck von den mannigfaltigen Anwendungen gibt, ist:

PAVELLE R., 1985: Applications of Computer Algebra. Kluwer Academic Publishers.

Übersichtsartikel

Die folgenden Artikel geben einen Überblick über das gesamte Gebiet der Computer-Algebra:

CAVINESS B.F., 1985: Computer Algebra: Past and Future. Proc. EUROCAL 1985, Linz, Austria, Lecture Notes in Computer Science, vol. 203, S. 1-18, Springer Verlag.

WINKLER F., 1986: Computer Algebra. In R.A. Meyers (ed.): 'The Encyclopedia of Physical Science and Technology', Academic Press, 1986, erscheint demnächst.

PAVELLE R., ROTHSTEIN M., FITCH J, 1982: Computer-Algebra. Spektrum der Wissenschaft, Februar 1982, S. 71-78.

Die folgende Arbeit gibt vor allem einen Überblick über Computer-Algebra-Software-Systeme:

YUN D.Y.Y., STOUTEMYER R.D., 1980: Symbolic Mathematical Computation. In J. Belzer, A.G. Holzman, A. Kent (eds.): Encyclopedia of Computer Science and Technology, vol. 15, S. 235-310. Marcel Dekker.

Originalliteratur

Seit 1985 gibt es eine wissenschaftliche Zeitschrift, die sich ausschließlich mit Symbolic Computation, insbesondere mit Computer-Algebra befaßt:

Journal of Symbolic Computation (B. BUCHBERGER et al., Hsg.), Academic Press.

Den größten Teil des Umfanges des Journal of Symbolic Computation machen Originalarbeiten aus (mathematische Grundlagen neuer und verbesserter Algorithmen zur Computer-Algebra und anderen Bereichen des Symbolic Computation). In diesem Journal erscheinen aber auch laufend - in einer eigenen Sektion - Übersichtsartikel über Teilgebiete der Computer-Algebra und - in einer

anderen Sektion - kurze Berichte über erfolgreiche Anwendungen der Computer-Algebra in allen Ingenieursbereichen.

Bis zum Erscheinen des Journal of Symbolic Computation war die Originalliteratur zur Computer-Algebra verstreut in verschiedenensten Zeitschriften. Insbesondere aber findet man einen Niederschlag fast aller wichtigen Beiträge zur Computer-Algebra seit 1966 in den Konferenzberichten der internationalen Konferenzen, die seit 1966 von der SIGSAM-Gruppe (Special Interest Group in Symbolic and Algebraic Manipulation) von ACM (Association for Computing Machinery) und SAME (Symbolic and Algebraic Manipulation in Europe) veranstaltet wurden. Eine vollständige Liste aller Konferenzen mit den bibliographischen Angaben für die Konferenzberichte findet sich in /Buchberger,Collins,Loos 1982,S.4ff/.

Seit 1982 haben folgende große internationale Computer-Algebra-Konferenzen mit Proceedings stattgefunden:

EUROCAM 82, Marseille, Frankreich, April 1982.
Proceedings (J. Calmet, Hsg.): Lecture Notes in Computer Science, vol. 144, Springer Verlag.

EUROCAL 83: London, England, März 1983.
Proceedings (J.A. van Hulzen, Hsg.): Lecture Notes in Computer Science, vol. 162, Springer Verlag.

RIKEN 84: Wako-shi, Saitama, Japan, Juni 1984.
Proceedings (N. Inada, T. Soma, Hsg.): Series in Computer Science, vol. 2, World Scientific Publ. Comp.

EUROSAM 84: Cambridge, England, Juli 1984.
Proceedings (J. Fitch, Hsg.): Lecture Notes in Computer Science, vol. 174, Springer Verlag.

EUROCAL 85: Linz, Österreich, April 1985.
Proceedings Vol. 1 (Invited Lectures) (B. Buchberger, Hsg.): Lecture Notes in Computer Science, vol. 203, Springer Verlag.
Proceedings Vol. 2 (Research Contributions) (B.F. Caviness, Hsg.): Lecture Notes in Computer Science, vol. 204, Springer Verlag.

SYMSAC 86: Waterloo, Kanada, Juli 1986.

Eine Konferenz zum speziellen Thema der algorithmischen Gruppentheorie fand im August 1982 in Durham, England, statt. Die zugehörigen Proceedings sind

ATKINSON A.,1984: Computational Group Theory. Academic Press.

Zitierte Literatur

ARNON D.S., COLLINS G.E., MCCALLUM S., 1984: Cylindrical Algebraic Decomposition I: The Basic Algorithm. SIAM Journal of Computing, vol. 13, no. 4, S. 865-877.

BUCHBERGER B., 1965: Ein Algorithmus zum Auffinden der Basiselemente des Restklassenringes nach einem nulldimensionalen Polynomideal. Dissertation, Universität Innsbruck und Aequationes Mathematicae, vol. 4, fasc. 3, S. 374-383 (1970).

BUCHBERGER B., 1985: Gröbner Bases: An Algorithmic Method in Polynomial Ideal Theory. In N.K. Bose (Hsg.): 'Multidimensional Systems Theory', S. 184-232, D.Reidel Publishing Company.

CAVINESS B.F., 1967: On Canonical Forms and Simplifikation. Ph.D. Diss., Pittsburgh, Carnegie-Mellon University, 1967 and Journal of the ACM, vol. 17, no. 2, S. 385-396 (1970).

CAVINESS B.F., 1985: Computer Algebra: Past and Future. Proc. EUROCAL 85, Linz, Austria, Lecture Notes in Computer Science, vol. 203, S. 1-18, Springer Verlag.

CHAR B.W., FEE G.J., GEDDES K.O., GONNET G.H., MONAGAN M.B., 1986: A Tutorial Introduction to Maple. Journal of Symbolic Computation, vol. 2, no. 2.

COLLINS G.E., 1985: The SAC-2 Computer Algebra System. Proc. EUROCAL 85, Linz, Austria, Lecture Notes in Computer Science, vol. 204, S. 34-35, Springer Verlag.

DICKSON L.E., 1913: Finiteness of the Odd Perfect and Primitive Abundant Numbers with n Distinct Prime Factors. American Journal of Mathematics, vol. 35, S. 115-138.

FATEMAN R.J., 1981: Symbolic and Algebraic Computer Programming Systems: SIGSAM Bulletin, vol. 15, no. 1, S. 21-32.

GEBAUER R., KREDEL H., 1983: Buchberger Algorithm System. SIGSAM Bulletin, vol. 18, no. 1.

HIRONAKA H., 1964: Resolution of Singularities of an Algebraic Variety over a Field of Characteristic Zero: I,II. Annals of Math., vol. 79, S. 109-327.

FITCH J., 1985: Solving Algebraic Problems with REDUCE. Journal of Symbolic Computation, vol. 1, no. 2, S. 211-227.

JENKS R.D., 1984: A Primer - 11 Keys to New SCRATCHPAD. Proc. EUROSAM 84, Cambridge, England, Lecture Notes in Computer Science, vol. 174, S. 123-147, Springer Verlag.

KALTOFEN E., 1982: Factorization of Polynomials. In B. Buchberger, G.E. Collins, R. Loos (Hsg.): 'Computer Algebra - Symbolic and Algebraic Computation', Springer Verlag, S. 95-113.

KARATSUBA A., OFMAN Y., 1963: Multiplication of Multidigit Numbers on Automata, Soviet Phys. Dokl. 7, S. 595-596.

KNUTH D.E., 1969: The Art of Computer Programming - Volume 2 / Seminumerical Algorithms. Addison-Wesley Publishing Company.

KUTZLER B., STIFTER S., 1986: Automated Geometry Theorem Proving using Buchberger's Algorithm. Proc. SYMSAC'86, Waterloo, Kanada, erscheint demnächst.

LICHTENBERGER F., 1981: REDUCE - Ein Beispiel eines Software-Systems für symbolisches und algebraisches Rechnen. Universität Linz, Institut für Mathematik, CAMP-Publ.81-11.0.

LOOS R., 1982: Computing in Algebraic Extensions. In B. Buchberger, G.E. Collins, R. Loos (Hsg.): 'Computer Algebra - Symbolic and Algebraic Computation', Springer Verlag, S. 173-188.

MAYR E.W., MEYER A.R., 1981: The Complexity of the Word Problems for Commutative Semigroups and Polynomial Ideals. Report LCS/TM-199, MIT Laboratory of Computer Science.

PAVELLE R., 1985: Applications of Computer Algebra. Kluwer Academic Publishers.

PAVELLE R., WANG P.S., 1985: MACSYMA from F to G. Journal of Symbolic Computation, vol. 1, no. 1, S. 69-100.

RAND R.H., 1984: Computer Algebra in Applied Mathematics: An Introduction to MACSYMA. Research Notes in Mathematics, vol. 94, Pitman Publishing Inc.

RISCH R.H., 1970: The Solution of the Problem of Integration in Finite Terms. Bulletin AMS 76, S. 605-608.

SCHWARTZ J.T., SHARIR M., 1983: On the 'Piano Movers' Problem - II. General Techniques for Computing Topological Properties of Real Algebraic Manifolds. Advances in Applied Mathematics, vol. 4, S. 298-351.

STOUTEMYER D.R., 1985: A Preview of the Next IBM-PC Version of muMATH. Proc. EUROCAL 85, Linz, Austria, Lecture Notes in Computer Science, vol. 203, S. 33-44.

SUTOR R.S., 1985: The Scratchpad II Computer Algebra Language and System. Proc. EUROCAL 85, Linz, Austria, Lecture Notes in Computer Science, vol. 204, S. 32-33.

TARSKI A., 1948: A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry. Univ. of Calif. Press.

TRINKS W., 1978: On B. Buchberger's Method for Solving Systems of Algebraic Equations. J. Number Theory, vol. 10, no. 4, S. 475-488.

VAN HULZEN J.A., CALMET J., 1982: Computer Algebra Systems. In B. Buchberger, G.E. Collins, R. Loos (Hsg.): 'Computer Algebra - Symbolic and Algebraic Computation', Springer Verlag, S. 221-243.

ZASSENHAUS H., 1969: On Hensel Factorization . International Journal of Number Theory, vol. 1, S. 291-311.

Ausbildung

An vielen Computer Science Departments in den USA und einigen Informatik-Instituten in Deutschland gibt es die Möglichkeit, sich in Computer-Algebra zu spezialisieren. An der Universität Linz wird für den gesamten Bereich des Symbolic Computation ein systematischer Studienschwerpunkt (ca. 30 Einzelkurse) angeboten, der sowohl für Studenten der Informatik als auch für Studenten der Mathematik offen steht. Eine Detailbeschreibung dieses Studienschwerpunktes kann beim ersten Autor dieses Beitrages bezogen werden.

Unser besonderer Dank gilt Prof. D.R. Stoutemyer für das Überlassen einer Kopie von muMATH-83, sowie IBM Wien und IBM Yorktown Heights für die Möglichkeit eines Besuches des Forschungsinstitutes in Yorktown Heights, um dort SCRATCHPAD zu benützen. Die Arbeit an diesem Manuskript erfolgte im Rahmen eines von SIEMENS München geförderten Forschungsprojektes. Das Manuskript wurde mit dem Arbeitsplatzsystem 5815 der Firma SIEMENS erstellt.

ALGORITHMEN ZUR METHODE DER FINITEN ELEMENTE FÜR VEKTORRECHNER

Matthias Kratz
(Rechenzentrum, Technische Universität Braunschweig)

"Now the engineer has to watch both the clock and the cash box. He is not able to try every possible combination of design parameters, but must strike an economic balance between the information he would like and the time and cost of getting it. In practice, the ease with which a final design can be modified will determine how closely the final product approaches the 'best possible' design. The automatic computer, by making calculations cheap and easy, enables the hard-pressed engineer to extend the range and depth of his design studies; not only can he examine a greater number of alternative designs, he can examine each of them much more thoroughly."

S.H. HOLLINGDALE, High Speed Computing (1959)