P5 - 5789

Б. Бухбергер

О ВЕЛИЧИНАХ S_i, ОПРЕДЕЛЕННЫХ РЕКУРСИЕЙ $S_{i+1} = u_i S_i + v_i S_{i-1}$

I. Постановка задачи

Рассмотрим величины S_i , определенные рекурсией:

(I.I) $S_{i+1}=u_i S_i + v_i S_{i-1}$ $(i\geqslant 2)$,

где u_i, v_i ($i\geqslant 2$) и S_1, S_2 – элементы произвольного кольца K, например, вещественные числа. Естественно, тогда и $S_i \in K$ для $i\geqslant 3$. Обозначим зависимость величин S_i ($i\geqslant 3$) от $S_1, S_2, u_2, \dots, u_{i-1}, v_2, \dots, v_{i-1}$ следующим образом:

(I.2) $$S_i = \sigma_i (S_1, S_2, u_2, \dots, u_{i-1}, v_2, \dots, v_{i-1}) , \quad (i\geqslant 3) .$$

Наша цель – дать явное представление этих функций σ_i . Можно представить σ_i в виде:

(I.3)
$$\begin{aligned}
&\sigma_1 (S_1) = S_1 ,\\
&\sigma_2 (S_1, S_2) = S_2\\
&\sigma_i (S_1, S_2, u_2, \dots, u_{i-1}, v_2, \dots, v_{i-1}) =\\
&\quad = v_2 \sigma_{i-2} (1, u_3, u_4, \dots, u_{i-1}, v_4, \dots, v_{i-1}) S_1 + \sigma_{i-1} (1, u_2, u_3, \dots, u_{i-1}, v_3, \dots, v_{i-1}) S_2 ,
\end{aligned}$$

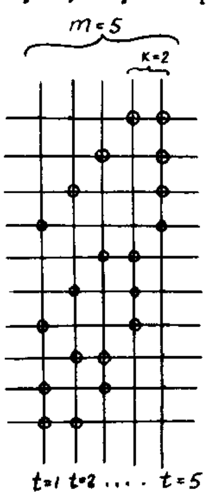
что легко проверяется подстановкой (I.3) в (I.I).

Поскольку в правой части равенства (I.3) первым аргументом функций σ_{i-1} и σ_{i-2} является 1, ограничимся в дальнейшем рассмотрением рекурсий вида (I.I), где $S_1=1$. Переобозначим тогда S_2 через u_1 (см. теорему 3.I).

2. Вспомогательные функции

Предварительно введем функции β и γ , которые в третьей главе будут играть важную роль. Наглядно функцию β можно описать следующей процедурой. Для нахождения значения $\beta(m, k, j, t)$ (m, k, j, t - целые числа, где $1 \leq m$, $0 \leq k \leq m$, $1 \leq j \leq \binom{m}{k}$, $1 \leq t \leq m$) запишем j-ое сочетание среди всех сочетаний k элементов из m , причем сочетания должны быть упорядочены способом, указанным ниже для случая $m = 5$, $k = 2$. Если при этом на нашем рисунке на t-ом месте j-ого сочетания стоит знак $\circ$, то полагаем $\beta(m, k, j, t)=2$, в противном случае $\beta(m, k, j, t)=1$.

Пример:



1-ое сочетание

2-ое "

j-ое сочетание ($j=1,\ldots,\binom{m}{k}$)

$\beta(5, 2, 7, 2)=1$, а $\beta(5, 2, 3, 2)=2$.

Такое наглядное описание функции β , конечно, имеет только вспомогательный характер. Сейчас дадим строгое определение этой функции ($m \geq 1$, $k, j, t \geq 0$):

$$(2.\mathrm{I})\qquad \beta(m,k,j,t)=\begin{cases} 1, & \text{если } k=0 \\ \beta(m-1,k-1,j,t), & \text{если } k>0,\ j\le\binom{m-1}{k-1},\ t\ne m \\ 2, & \text{если } k>0,\ j\le\binom{m-1}{k-1},\ t=m \\ \beta\left(m-1,k,j-\binom{m-1}{k-1},t\right), & \text{если } k>0,\ j>\binom{m-1}{k-1},\ t\ne m \\ 1, & \text{если } k>0,\ j>\binom{m-1}{k-1},\ t=m. \end{cases}$$

Простой индукцией по m доказывается, что, по крайней мере, для всех m, k, j, t с $0\le k\le m$, $1\le j\le\binom{m}{k}$, $1\le t\le m$ – (2.I) дает точно одно значение $\beta(m,k,j,t)$.

Указанное выше наглядное представление функции β удовлетворяет определению (2.I) для $0\le k\le m$, $1\le j\le\binom{m}{k}$, $1\le t\le m$.

С помощью функции β введем новую функцию γ :

$$(2.2)\qquad \gamma(m,k,j,t)=\sum_{\tau=1}^{t}\beta(m,k,j,\tau).$$

Справедливы следующие отношения:

$$(2.3)\qquad \beta(1,0,1,1)=1,$$

$$(2.4)\qquad \beta(1,1,1,1)=2,$$

$$(2.5)\qquad \gamma(m,k,j,m)=m+k,\quad \text{если}\quad 0\le k\le m,\ 1\le j\le\binom{m}{k}.$$

(2.3) и (2.4) видны из (2.I). (2.5) легко проверяется для $m=1$, $k=0,1$ и для произвольного m и $k=0$. Для произвольного m и $k>0$ (2.5) доказывается индукцией по m, причем надо выделить случаи $1\le j\le\binom{m-1}{k-1}$ и $\binom{m-1}{k-1}<j\le\binom{m}{k}$ и, соответственно, использовать вторую и третью, либо четвертую и пятую строки в (2.I). Подробности опускаем.

В этой работе договоримся пользоваться следующими соотношениями:

$$(2.6)\qquad \binom{0}{0}=1$$

$$(2.7)\qquad \binom{n}{k}=0 \text{ для } k<0,$$

(2.8) $\prod\limits_{t=q}^{p} c_t = 1$, если $q > p$.

Кроме того, часто будем ставить номера используемых соотношений над знаком равенства, справедливого благодаря этим соотношениям, например,

$$\beta(1,0,1,1) \overset{(2.1)}{=} 1.$$

3. Явное описание величин S_i

Введем сокращенную запись

(3.I) $$(u,v)_q^p = \begin{cases} u_q, & \text{если } p=1 \\ v_q, & \text{если } p=2, \end{cases}$$

с помощью которой формулируем следующую теорему.

Теорема 3.I: Пусть величины $S_i (i \geqslant 1)$ определяются рекурсией:

(3.3) $$S_1 = 1,$$
$$S_2 = u_1,$$
$$S_{i+1} = u_i S_i + v_i S_{i-1} \qquad (i \geqslant 2),$$

тогда

(3.4) $$S_i = \sum_{k=0}^{[\frac{i+1}{2}]-1} \sum_{j=1}^{\binom{i-k-1}{k}} \prod_{t=1}^{i-k-1} (u,v)_{\gamma(i-k-1,k,j,t)}^{\beta(i-k-1,k,j,t)} \quad (i \geqslant 1).$$

Доказательство:

$$i=1: \quad S_1 = \prod_{t=1}^{0} (u,v)_{\gamma(0,0,1,t)}^{\beta(0,0,1,t)} \overset{(2.6),(2.8)}{=} 1.$$

$$i=2: \quad S_2 = \prod_{t=1}^{1} (u,v)_{\gamma(1,0,1,t)}^{\beta(1,0,1,t)} \overset{(2.5)}{=} u_1 .$$

Далее мы докажем, что для $i \geqslant 2$ величины S_{i+1}, S_i, S_{i-1}, определенные формулой (3.4), удовлетворяют (3.3).

Используя следующую сокращенную запись:

$$(3.5) \qquad P_{m,k,j} = \prod_{t=1}^{m} (u,v)^{\beta(m,k,j,t)}_{\gamma(m,k,j,t)} \quad ,$$

установим два равенства (3.6) и (3.I0) для величин $P_{m,k,j}$.

$$(3.6) \qquad u_i \cdot P_{i-k-1,k,j} = P_{i-k,k,j+\binom{i-k-1}{k-1}} \quad , \qquad \text{если } 2 \le i,\ 0 \le k \le \left[\tfrac{i+1}{2}\right]-1,\ 1 \le j \le \binom{i-k-1}{k} .$$

Сначала докажем (3.6) для $k=0$. В этом случае $j=1$

$$u_i \cdot P_{i-1,0,1} = u_i \cdot \prod_{t=1}^{i-1} (u,v)^{\beta(i-1,0,1,t)}_{\gamma(i-1,0,1,t)} \overset{(2.1)}{=} u_i \cdot \prod_{t=1}^{i-1} u_t = \prod_{t=1}^{i} u_t \quad ,$$

и также

$$P_{i-0,0,1+0} = \prod_{t=1}^{i} (u,v)^{\beta(i,0,1,t)}_{\gamma(i,0,1,t)} = \prod_{t=1}^{i} u_t \ .$$

При $k>0$ справедливы следующие равенства:

$$(3.7) \qquad (u,v)^{\beta(i-k,k,j+\binom{i-k-1}{k-1},i-k)}_{\gamma(i-k,k,j+\binom{i-k-1}{k-1},i-k)} \overset{(2.1),(2.5)}{=} u_i$$

(принимая во внимание, что $1 \le j \Longrightarrow j+\binom{i-k-1}{k-1} > \binom{i-k-1}{k-1}$,

$0 \le k \le \left[\frac{i+1}{2}\right]-1 \Rightarrow k \le i-k$, и

$1 \le j \le \binom{i-k-1}{k} \Longrightarrow 1 \le j+\binom{i-k-1}{k-1} \le \binom{i-k}{k}$).

$$(3.8) \qquad \beta(i-k,k,j+\tbinom{i-k-1}{k-1},t) \overset{(2.1)}{=} \beta(i-k-1,k,j,t) \quad \text{для } 1 \le t < i-k.$$

и

$$(3.9) \qquad \gamma(i-k,k,j+\tbinom{i-k-1}{k-1},t) = \gamma(i-k-1,k,j,t) \quad \text{для } 1 \le t < i-k.$$

Теперь

$$P_{i-k,k,j+\binom{i-k-1}{k-1}} = \left(\prod_{t=1}^{i-k-1} (u,v)^{\beta(i-k,k,j+\binom{i-k-1}{k-1},t)}_{\gamma(i-k,k,j+\binom{i-k-1}{k-1},t)}\right) \cdot (u,v)^{\beta(i-k,k,j+\binom{i-k-1}{k-1},i-k)}_{\gamma(i-k,k,j+\binom{i-k-1}{k-1},i-k)} =$$

$$\overset{(3.7),(3.8),(3.9)}{=} u_i \cdot \prod_{t=1}^{i-k-1} (u,v)^{\beta(i-k-1,k,j,t)}_{\gamma(i-k-1,k,j,t)} = u_i \cdot P_{i-k-1,k,j} \ .$$

т.е. (3.6) доказано.

(3.I0) $v_i \cdot P_{i-k-2,k,j} = P_{i-k-1,k+1,j}$, если $2 \le i,\ 0 \le k \le [\frac{i}{2}]-1$, $1 \le j \le \binom{i-k-2}{k}$.

Для доказательства равенства (3.I0) сначала заметим, что

(3.II) $$(u,v)^{\beta(i-k-1,k+1,j,i-k-1)}_{\gamma(i-k-1,k+1,j,i-k-1)} \overset{(2.1),(2.5)}{=} v_i,$$

(используя $j \le \binom{i-k-2}{k}$,
$k \le [\frac{i}{2}]-1 \Rightarrow k+1 \le i-k-1$, и
$1 \le j \le \binom{i-k-2}{k} \Rightarrow 1 \le j \le \binom{i-k-1}{k+1}$),

(3.I2) $\beta(i-k-1,k+1,j,t) \overset{(2.1)}{=} \beta(i-k-2,k,j,t)$ для $1 \le t < i-k-1$, и

(3.I3) $\gamma(i-k-1,k+1,j,t) = \gamma(i-k-2,k,j,t)$ для $1 \le t \le i-k-1$.

Теперь

$$P_{i-k-1,k+1,j} = \left(\prod_{t=1}^{i-k-2} (u,v)^{\beta(i-k-1,k+1,j,t)}_{\gamma(i-k-1,k+1,j,t)}\right) \cdot (u,v)^{\beta(i-k-1,k+1,j,i-k-1)}_{\gamma(i-k-1,k+1,j,i-k-1)} =$$

$$\overset{(3.11),(3.12),(3.13)}{=} v_i \cdot \prod_{t=1}^{i-k-2} (u,v)^{\beta(i-k-2,k,j,t)}_{\gamma(i-k-2,k,j,t)} = v_i \cdot P_{i-k-2,k,j},$$

т.е. (3.I0) тоже доказано.

Итак, можем теперь вычислять

$$u_i S_i + v_i S_{i-1} = \sum_{k=0}^{[\frac{i+1}{2}]-1} \sum_{j=1}^{\binom{i-k-1}{k}} u_i \cdot P_{i-k-1,k,j} + \sum_{k=0}^{[\frac{i}{2}]-1} \sum_{j=1}^{\binom{i-k-2}{k}} v_i \cdot P_{i-k-2,k,j} =$$

$$\overset{(3.6),(3.10)}{=} \sum_{k=0}^{[\frac{i+1}{2}]-1} \sum_{j=1}^{\binom{i-k-1}{k}} P_{i-k,k,j+\binom{i-k-1}{k-1}} + \sum_{k=0}^{[\frac{i}{2}]-1} \sum_{j=1}^{\binom{i-k-2}{k}} P_{i-k-1,k+1,j} = Y.$$

Выделим два случая

a) $i = 2n$ ($n \geq 1$). При этом

$$\left[\frac{i+1}{2}\right] = \left[\frac{i}{2}\right] = \left[\frac{i+1}{2}\right] - 1 = n \quad \text{и} \quad \binom{i-[\frac{i}{2}]-1}{[\frac{i}{2}]-1} = \binom{i-[\frac{i}{2}]}{[\frac{i}{2}]} = 1.$$

Итак,
$$Y = \sum_{k=0}^{[\frac{i}{2}]-1} \sum_{j=1+\binom{i-k-1}{k-1}}^{\binom{i-k-1}{k}+\binom{i-k-1}{k-1}} P_{i-k,k,j} + \sum_{k=1}^{[\frac{i}{2}]} \sum_{j=1}^{\binom{i-k-1}{k-1}} P_{i-k,k,j} =$$

$$= \sum_{k=1}^{[\frac{i}{2}]-1} \left(\sum_{j=1+\binom{i-k-1}{k-1}}^{\binom{i-k}{k}} P_{i-k,k,j} + \sum_{j=1}^{\binom{i-k-1}{k-1}} P_{i-k,k,j} \right) + \sum_{j=1+0}^{\binom{i-1}{0}+0} P_{i-0,0,j} + \sum_{j=1}^{\binom{i-[\frac{i}{2}]-1}{[\frac{i}{2}]-1}} P_{i-[\frac{i}{2}],[\frac{i}{2}],j} =$$

$$= \sum_{k=1}^{[\frac{i}{2}]-1} \sum_{j=1}^{\binom{i-k}{k}} P_{i-k,k,j} + \sum_{j=1}^{\binom{i-0}{0}} P_{i-0,0,j} + \sum_{j=1}^{\binom{i-[\frac{i}{2}]}{[\frac{i}{2}]}} P_{i-[\frac{i}{2}],[\frac{i}{2}],j} =$$

$$= \sum_{k=0}^{[\frac{i}{2}]} \sum_{j=1}^{\binom{i-k}{k}} P_{i-k,k,j} = \sum_{k=0}^{[\frac{i+2}{2}]-1} \sum_{j=1}^{\binom{i-k}{k}} P_{i-k,k,j} = S_{i+1}.$$

b) $i = 2n+1$ ($n \geq 1$). В этом случае $\left[\frac{i+1}{2}\right]-1 = \left[\frac{i}{2}\right] = \left[\frac{i+2}{2}\right]-1$,

$$Y = \sum_{k=0}^{[\frac{i}{2}]} \sum_{j=1+\binom{i-k-1}{k-1}}^{\binom{i-k-1}{k}+\binom{i-k-1}{k-1}} P_{i-k,k,j} + \sum_{k=1}^{[\frac{i}{2}]} \sum_{j=1}^{\binom{i-k-1}{k-1}} P_{i-k,k,j} =$$

$$= \sum_{k=1}^{[\frac{i}{2}]} \left(\sum_{j=1+\binom{i-k-1}{k-1}}^{\binom{i-k}{k}} P_{i-k,k,j} + \sum_{j=1}^{\binom{i-k-1}{k-1}} P_{i-k,k,j} \right) + \sum_{j=1+0}^{\binom{i-1}{0}+0} P_{i-0,0,j} =$$

$$= \sum_{k=1}^{[\frac{i}{2}]} \sum_{j=1}^{\binom{i-k}{k}} P_{i-k,k,j} + \sum_{j=1}^{\binom{i-0}{0}} P_{i-0,0,j} = \sum_{k=0}^{[\frac{i}{2}]} \sum_{j=1}^{\binom{i-k}{k}} P_{i-k,k,j} =$$

$$= \sum_{k=0}^{[\frac{i+2}{2}]-1} \sum_{j=1}^{\binom{i-k}{k}} P_{i-k,k,j} = S_{i+1} .$$

На этом теорема 3.I доказана.

4. Примечания

Приведем два примера использования представления (3.4).

Пример I: Числа Фибоначчи.

Числа Фибоначчи F_i ($i \geq 1$) определены рекурсией

(4.I) $\quad F_1 = F_2 = 1$

$\quad F_{i+1} = F_i + F_{i-1}$ (для $i \geq 2$).

Подставляя $u_1 = u_i = v_i = 1$ ($i \geq 2$) в (3.4), получаем известное выражение для i -ого числа Фибоначчи (см., например [2], стр. 13):

(4.2) $$F_i = \sum_{k=0}^{[\frac{i+1}{2}]-1} \binom{i-k-1}{k} .$$

Именно:

$$F_i = \sum_{k=0}^{[\frac{i+1}{2}]-1} \sum_{j=1}^{\binom{i-k-1}{k}} \prod_{t=1}^{i-k-1} 1 = \sum_{k=0}^{[\frac{i+1}{2}]-1} \sum_{j=1}^{\binom{i-k-1}{k}} 1 = \sum_{k=0}^{[\frac{i+1}{2}]-1} \binom{i-k-1}{k} .$$

Пример 2: Определитель трехдиагональных матриц.

Пусть

$$(4.3)\qquad A = \begin{pmatrix} b_1 & c_2 & & & & \\ a_2 & b_2 & c_3 & & \mathrm{O} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \mathrm{O} & & a_{i-1} & b_{i-1} & c_i \\ & & & & a_i & b_i \end{pmatrix}$$

– трехдиагональная матрица. Ее определитель обозначим через $\det_{i+1}(a_2,\ldots,a_i,b_1,\ldots,b_i,c_2,\ldots,c_i)$. Разлагая определитель по последней строке и минор, принадлежащий a_i, по последнему столбцу, получаем:

$$(4.4)\quad \det_{i+1}(a_2,\ldots,a_i,b_1,\ldots,b_i,c_2,\ldots,c_i) =$$
$$= b_i \det_i(a_2,\ldots,a_{i-1},b_1,\ldots,b_{i-1},c_2,\ldots,c_{i-1}) -$$
$$- a_i c_i \det_{i-1}(a_2,\ldots,a_{i-2},b_1,\ldots,b_{i-2},c_2,\ldots,c_{i-2}).$$

Знаем, что

$$(4.5)\quad \det_2(b_1) = b_1 .$$

Кроме того, полагаем

$$(4.6)\quad \det_1 = 1 .$$

Таким образом, (4.4), (4.5) и (4.6) дают рекурсию вида (3.3) для вычисления $\det_{i+1}(a_2,\ldots,a_i,b_1,\ldots,b_i,c_2,\ldots,c_i)$,
где теперь

$$u_i = b_i \quad (i \geq 1) \qquad \text{и} \qquad v_i = -a_i c_i \quad (i \geq 2).$$

Формула (3.4) дает аналитическое представление для $\det_i(a_2,\ldots,a_{i-1},b_1,\ldots,b_{i-1},c_2,\ldots,c_{i-1})$:

$$\text{(4.7)}\quad \det_i(a_2, \ldots, a_{i-1}, b_1, \ldots, b_{i-1}, c_2, \ldots, c_{i-1}) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{i+1}{2}\right]-1} \sum_{j=1}^{\binom{i-k-1}{k}} \prod_{t=1}^{i-k-1} (b, ac)_{\gamma(i-k-1,\, k,\, j,\, t)}^{\beta(i-k-1,\, k,\, j,\, t)} \qquad (i \geq 1),$$

где

$$\text{(4.8)}\quad (b, ac)_q^p = \begin{cases} b_q & \text{, если } p = 1 \\ -ac_{1q} & \text{, если } p = 2. \end{cases}$$

Этими определителями можно, например, выразить элементы обратной матрицы A^{-I} (см./I/), так что отношение (4.7) позволяет и явное представление для обратной матрицы A^{-I}.

Проблема возникла в ходе общей работы с Г.Емельяненко/I/. В.Душский (Москва) и Г.Ососков (Дубна) дали ценные советы. В.Галактионов просмотрел русский текст работы. Им всем я выражаю глубокую благодарность.

ЛИТЕРАТУРА

I . Б.Бухбергер, Г.А.Емельяненко. Препринт ОИЯИ, PII-5686, Дубна, I97I.

2 . Н.Н.Воробьев. Числа Фибоначчи. Изд. "Наука", М., I964.

Рукопись поступила в издательский отдел
I9 мая I97I года.