

Formale Grundlagen der Informatik 1  
Klausur vom 20.3.2000  
Gruppe B

Vorname, Nachname: \_\_\_\_\_

Matrikelnummer: \_\_\_\_\_

Studienkennzahl: \_\_\_\_\_

Dieser Zettel ist als Deckblatt mit abzugeben!

1. (10 Punkte) Schreiben Sie folgende Aussage in der Standardform an (nur eine Variable bei jedem Quantor, Aufschreiben versteckter Junktoren) und analysieren sie diese Form syntaktisch (unter Angabe der jeweils freien Variablen):

$$\forall a \in \mathbb{R}_{\geq 0}, n \in \mathbb{N}_{>0} : \exists x \in \mathbb{R} : x^n = a$$

Drücken Sie diese Aussage in einem umgangssprachlichen Satz aus.

2. (15 Punkte) Gelten folgende Aussagen oder nicht (Begründung)?
- (a)  $A \cap B \subseteq A \cup B$ , für alle Mengen  $A$  und  $B$ .
  - (b)  $1 \in \{\{1\}\}$ .
  - (c)  $\emptyset \times A = \emptyset$ , für alle Mengen  $A$ .
  - (d)  $|A \cap B| = \min\{|A|, |B|\}$ , für alle Mengen  $A$  und  $B$ .
  - (e) Jede Menge ist eine Teilmenge ihrer Potenzmenge.

3. (15 Punkte)

Seien  $a$  und  $b$  zwei Folgen der Länge  $n$  über  $\mathbb{N}$ . Der *Engpass*  $E_n(a, b)$  von  $a$  und  $b$  ist diejenige Position, an der sich  $a$  und  $b$  am wenigsten unterscheiden, d.h.

$$E_5([5, 9, 12, 11, 4], [8, 3, 11, 14, 7]) = 2.$$

Definieren Sie formal die Funktion  $E_n$ , vergessen Sie dabei nicht die Angabe des Argumentbereichs und des Wertebereichs.

Was gilt für  $E_5([4, 5, 6, 7, 8], [8, 7, 9, 9, 5])$ ?

4. (15 Punkte)

Gegeben sei die Menge der Buchstabenfolgen

“seas”, “seashore”, “sea”, “sh”, “shore”, “ash”,

mit der partiellen Ordnung “ist enthalten in” (d.h. “ash” ist enthalten in “seashore”, aber “sea” ist nicht enthalten in “shore”).

Zeichnen sie das Hassediagramm dieser Relation und geben sie das kleinste bzw. größte Element an (falls solche Elemente existieren).

5. (15 Punkte) Seien  $a := [1, 2, 3, 0]$ ,  $b := [2, 3, 0, 1]$ . Berechnen Sie unter Angabe der wesentlichen Zwischenschritte

(a)  $\sum_{0 \leq i < j < 4} (a_i + b_j)$

(b)  $\max_i |a_i - b_i|$

(c)  $|\{i \in \mathbb{N}_4 : a_i > b_i\}|$

(d)  $\prod_{0 \leq i < 4} (a \circ b)_i$

(e)  $a^{-1} \circ b^{-1}$

6. (15 Punkte) Seien  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir definieren die Relation

$$R(f, g) :\Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N} : f(i) * g(i) \geq 0$$

Beweisen Sie ausführlich:

$R$  ist transitiv auf  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ .

7. (15 Punkte) Wir definieren

$$S_k := \sum_{i=1}^k \frac{1}{i^2}$$

Zeigen Sie mittels Induktion ausführlich:

$$\forall n \in \mathbb{N}_{>0} : S_n \leq 2 - \frac{1}{n}.$$