

Formale Grundlagen der Informatik 1
Klausur vom 1.2.2000
Gruppe B

Vorname, Nachname: _____

Matrikelnummer: _____

Studienkennzahl: _____

Dieser Zettel ist als Deckblatt mit abzugeben!

1. (10 Punkte) Schreiben Sie folgende Aussage in einer Form an, in der nur Variablen bei den Quantoren vorkommen (z.B., $\forall y : \dots$, was passiert dann mit dem $y \in B$?) und analysieren sie diese Form syntaktisch (unter Angabe der jeweils freien Variablen):

$$f : A \rightarrow B \wedge \forall y \in B : \exists x \in A : f(x) = y$$

Drücken Sie diese Aussage in einem umgangssprachlichen Satz aus.

2. (15 Punkte) Gelten folgende Aussagen oder nicht (Begründung)?
- (a) $A \times B : A \rightarrow B$, für alle Mengen A und B .
 - (b) $\{1\} \in A$, wobei $A := \{1, \emptyset\}$.
 - (c) $\{\emptyset\} \subseteq \emptyset$
 - (d) $A \subseteq B \Rightarrow A \times A \subseteq B \times B$, für alle Mengen A und B .
 - (e) Ist f eine surjektive Funktion von A nach B , dann gilt $f^{-1}(B) = A$.

3. (15 Punkte)

Sei f eine Folge der Länge n über einer Menge A und $a \in A$. Die *größte Position* $G_n(f, a)$ ist die größte Position, an der f den Wert a annimmt, d.h.

$$G_n([0, 1, 2, 1, 1, 2], 1) = 4.$$

Definieren Sie formal die Funktion G_n , vergessen Sie dabei nicht die Angabe des Argumentbereichs und des Wertebereichs.

Was gilt aufgrund Ihrer Definition für

$$G_6([0, 1, 2, 1, 1, 2], 3)?$$

4. (15 Punkte) Wir definieren die Ordnungsrelationen

$$A \preceq_n B \quad :\Leftrightarrow \quad A = O_n(B) \quad (1)$$

$$A \prec_n B \quad :\Leftrightarrow \quad A \preceq_n B \wedge B \not\preceq_n A \quad (2)$$

Ordnen Sie die durch folgende Terme beschriebenen Funktionen unter Verwendung von \preceq_n und \prec_n :

(a) $2^n - 1000$

(b) $n^3 - 2n^2$

(c) $0.2n^4$

(d) $(n + 50)^2$

(e) $-10n^2$

(f) $500 \log n$

5. (15 Punkte) Sei $a = [0, 3, 1, 2]$. Berechnen Sie unter Angabe der wesentlichen Zwischenschritte

(a) $\sum_{0 \leq i < j < \text{length}(A)} |a_i - a_j|$

(b) $\min_i |a_i - i|$

(c) $|\{i \in \mathbb{N}_{\text{length}(A)} \mid a_i > i\}|$

(d) $\sum_{0 \leq i < \text{length}(A)} a_i * (a^{-1})_i$

(e) $a \circ a$

6. (15 Punkte) Seien $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Wir definieren die Relation:

$$f \preceq g \quad :\Leftrightarrow \quad \exists c \in \mathbb{R} : \forall i \in \mathbb{N} : |f(i)| \leq c * |g(i)|$$

Beweisen Sie ausführlich:

$$\preceq \text{ ist transitiv auf } \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

7. (15 Punkte) Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt folgende Beziehung?

$$2^n < n!$$

Formulieren Sie einen entsprechenden Satz (formal) und beweisen Sie ihn ausführlich. Welche Beweistechnik ist anzuwenden?