Formale Grundlagen der Informatik 1
Klausur vom 1.2.2000
Gruppe A

Vorname, Nachname: ____________________

Matrikelnummer: ________________

Studienkennzahl: ________________

Dieser Zettel ist als Deckblatt mit abzugeben!

1. (10 Punkte) Schreiben Sie folgende Aussage in einer Form an, in der nur Variablen bei den Quantoren vorkommen (z.B., $\exists n : \ldots$, was passiert dann mit dem $n \in \mathbb{N}$?) und analysieren sie diese Form syntaktisch (unter Angabe der jeweils freien Variablen):

$$\exists n \in \mathbb{N} : \forall i \geq n : \exists c \in \mathbb{R} : |f_i| \leq c * |g_i|$$

   Drücken Sie diese Aussage in einem umgangssprachlichen Satz aus.

2. (15 Punkte) Gelten folgende Aussagen oder nicht (Begründung)?

   (a) $\emptyset : A \to B$, für alle Mengen A und B.

   (b) $A \in B$, wobei $A := \{1\}, B := \{1, \emptyset\}$.

   (c) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

   (d) $A \in B, B \subseteq C \Rightarrow A \in C$, für alle Mengen A, B, C.

   (e) Wenn f eine totale Funktion von A nach B ist, dann ist f^{-1} eine totale Funktion von B nach A.

3. (15 Punkte)

   Seien a und b zwei Folgen der Länge n über $\{0, 1\}$. Der *Hammingabstand* $H_n(a, b)$ ist die Anzahl der Positionen, an denen sich a und b unterscheiden, d.h.

$$H_5([0, 1, 0, 1, 1], [0, 1, 1, 0, 1]) = 2.$$

   Definieren Sie formal die Funktion H_n, vergessen Sie dabei nicht die Angabe des Argumentbereichs und des Wertebereichs.

   Was gilt aufgrund Ihrer Definition für

$$H_5([0, 1, 0, 1, 1], [0, 1, 1, 0])?$$

4. (15 Punkte) Wir definieren die Ordnungsrelationen

$$A \preceq_n B \quad :\Leftrightarrow \quad A = O_n(B) \tag{1}$$
$$A \prec_n B \quad :\Leftrightarrow \quad A \preceq_n B \wedge B \not\preceq_n A \tag{2}$$

Ordnen Sie die durch folgende Terme beschriebenen Funktionen unter Verwendung von $\preceq_n$ und $\prec_n$:

(a) $(n + 100)^2$
(b) $n^3 - 2n^2$
(c) $0.2n^4 + 1000$
(d) $1000 \log n$
(e) 3^n
(f) $-5n^2$

5. (15 Punkte) Sei $a = [2, 0, 3, 1]$. Berechnen Sie unter Angabe der wesentlichen Zwischenschritte

(a) $\sum_{0 \leq i < j < \mathrm{length}(A)} |a_i - a_j|$
(b) $\max_i |a_i - i|$
(c) $|\{i \in \mathbb{N}_{\mathrm{length}(A)} | a_i > i\}|$
(d) $\sum_{0 \leq i < \mathrm{length}(A)} a_i * (a^{-1})_i$
(e) $a \circ a$

6. (15 Punkte) Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Wir definieren die Relation

$$f || g :\Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N} : f(i) | g(i)$$

(wobei "|" die Relation "teilt" bezeichnet). Beweisen Sie ausführlich:

$$|| \text{ ist transitiv auf } \mathbb{N} \to \mathbb{N}.$$

7. (15 Punkte) Ab welchem $n \in \mathbb{N}$ gilt folgende Beziehung immer?

$$n^2 < 2^n$$

Formulieren Sie einen entsprechenden Satz (formal) und beweisen Sie ihn ausführlich. Welche Beweistechnik ist anzuwenden?