

# Übungsblatt 9

Besprechung am 11/01/2024

---

**Aufgabe 68.** Sei

$$a_k := \begin{cases} (-1/3)^k & \text{für } k \text{ ungerade} \\ (1/5)^k & \text{für } k \text{ gerade.} \end{cases}$$

Nutzen Sie das Wurzelkriterium, um zu zeigen, dass  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergent ist.

**Aufgabe 69.** Geben Sie ein Beispiel für eine Reihe  $a_k$  an, sodass  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergent ist und  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  divergent ist.

**Aufgabe 70.** Zeigen Sie, dass  $\sum_{k=0}^{\infty} (x/3)^k$  stetig in  $(-3, 3)$  ist. Hinweis: Nutzen Sie Satz 6.9.

**Aufgabe 71.** Sei  $b \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie:

- Wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$  gilt, dann folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = \infty$ .
- Wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$  gilt, dann folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = -\infty$ .

**Aufgabe 72.** Berechnen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen von Definition 6.4:

- $\exp(x)$
- $\cos(x)$
- $\sin(x)$
- $\ln(x+1)$

Hinweis: Nutzen Sie den Tipp nach Definition 6.3.

**Aufgabe 73.** Zeigen Sie:

- $\exp(x) + x \sin(x)$  ist stetig in  $(-\infty, \infty)$ .
- $\exp(x) \sin(x)$  ist stetig in  $(-\infty, \infty)$ .
- $\frac{1}{x-1} + \sin(x)$  ist stetig in  $(-1, 1)$ .

Hinweis: Nutzen Sie Satz 6.9 und Satz 4.14

**Aufgabe 74.** Berechnen Sie die Konvergenzradien von

- $\sum_{n=1}^{\infty} (2 + \sin(n))x^n / n!$ ;
- $\sum_{n=1}^{\infty} x^n / \sqrt{n!}$ .

**Aufgabe 75.** Zeigen Sie: Es gibt ein  $M \in \mathbb{R}$  sodass

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{1}{k} \right)^k \leq M$$

. Hinweis: Nutzen Sie die Ungleichung  $1 \leq \left( 1 + \frac{1}{k} \right)^k \leq 3$  von Beispiel 3.21.