1. Vorlesungsklausur

7. Februar 2023

Name:
Matrikelnummer:
(Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer auf extra Blätter, die abgegeben werden.)

Aufgabe 1. (5 Punkte)

Jede Funktion ist berechenbar.	☐wahr ☒falsch
Sei $a_n \in (0,1)^\infty$. Konvergiert $(\sqrt{a_n})_{n\geq 1}$, dann konvergiert auch $(a_n)_{n\geq 1}$.	☒wahr ☐falsch
Jede nach unten beschränkte und monoton steigende Folge $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ besitzt einen Grenzwert.	☐wahr ☒falsch
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine beliebige Funktion. Wenn f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, dann ist $\frac{1}{f}$ in $\mathbb{R}$ stetig.	☒wahr ☐falsch
Wenn f in $\mathbb{R}$ stetig ist, dann ist f in jedem endlichen Intervall von $\mathbb{R}$ integrierbar.	☒wahr ☐falsch

Aufgabe 2. (6 Punkte)

a) Sei $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine Folge. Definieren Sie: $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gegen den Grenzwert $M \in \mathbb{R}$ (d.h. $\lim_{n\to\infty} a_n = M$).

b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$. Definieren Sie: f besitzt einen Grenzwert $M \in \mathbb{R}$ in x_0 (d.h. $\lim_{x\to x_0} f(x) = M$).

c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$. Definieren Sie: f is stetig in x_0.

Aufgabe 3. (6 Punkte) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie mit Hilfe von Nullfolgen oder widerlegen Sie (mit Angabe eines Gegenbeispiels):

a) Wenn f stetig in $\mathbb{R}$ ist, dann ist auch f^2 stetig in $\mathbb{R}$.

b) Wenn f^2 stetig in $\mathbb{R}$ ist, dann ist auch f stetig in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 4. (6 Punkte) Welche Reihen konvergieren? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5\,n^2 + 2^{-n} + 2}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(2n)!}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{4n+1}}{n^n}$

Aufgabe 5. (6 Punkte) Bestimmen Sie eine Formel für $f_n \in \mathbb{R}$ (d.h. eine Rekurrenz in f_n, f_{n-1}, f_{n-2}, f_{n-3} mit den entsprechenden Startwerten $f_0, f_1, f_2 \in \mathbb{Q}$), so dass Folgendes gilt:

$$\left(1 + 3x + 2x^2 + x^3\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\, x^n\right) = 1.$$

Aufgabe 6. (6 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{e^n + e^{n^2} + 5e^{n^3}}{1 + e^{n^3}}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x + x^2 + 2x^5}{e^{x^2} - e^{2x}}$

Begründen Sie jeden Ihre Rechenschritte.

Aufgabe 7. (6 Punkte) Berechnen Sie Stammfunktionen von den folgenden Funktionen:

a) $\displaystyle\int x^2 \sin(x^3)\, dx$ b) $\displaystyle\int x^2\, e^x\, dx$ c) $\displaystyle\int \ln(5x)\, dx.$