Vorlesung Analysis für Informatiker **Wintersemester 2020**

Vorlesungsklausur A

12. Feburar 2021

Name:
Matrikelnummer:
(Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer auf extra Blätter, die abgegeben werden.)

Eidesstattliche Erklärung:
Hiermit versichere ich an Eides statt, dass ich die oben angeführte Klausur selbst und ohne fremde Hilfe, insbesondere ohne Kommunikation mit Dritten, sowie ohne Benutzung anderer als der explizit erlaubten Quellen und Hilfsmittel bearbeiten werde.

Mir ist bekannt, dass Zuwiderhandeln zur Nichtigerklärung der Beurteilung führt, wobei die nichtig erklärte Prüfung auf die Gesamtzahl der Wiederholungen anzurechnen ist, und dass Zuwiderhandeln zudem weitere rechtliche Schritte nach sich ziehen kann.

Datum, Ort Unterschrift

Aufgabe 1. (5 Punkte)
Kreuzen Sie richtig an:

1	Die reellen Zahlen können geordnet werden.	☐wahr ☐falsch
2	Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ invertierbar. Ist f differenzierbar auf $\mathbb{R}$, dann ist auch f^{-1} differenzierbar auf $\mathbb{R}$.	☐wahr ☐falsch
3	Jede nach unten beschränkte und monoton fallende Folge $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ besitzt einen Grenzwert.	☐wahr ☐falsch
4	$(e^{3x})' = e^{3x}$	☐wahr ☐falsch
5	Ist $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergent, dann ist auch $\left(\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k)\right)_{n\geq 1}$ konvergent.	☐wahr ☐falsch

Aufgabe 2. (6 Punkte)
Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie mit Hilfe von Nullfolgen dass $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $q(x) = f(x) - 2g(x)$ differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 3. (6 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen oder widerlegen Sie (mit Angabe eines Gegenbeispiels):

a) Wenn das Produkt f^2 differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist, dann ist f auch differenzierbar auf $\mathbb{R}$.

b) Wenn f stetig in $\mathbb{R}$ ist, dann ist f auch differenzierbar auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe 4. (6 Punkte)
Finden Sie eine Rekurrenz für $g_n \in \mathbb{R}$ so dass folgendes gilt:

$$(1-2x-x^2)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} g_n\, x^n\Big) = 1.$$

Aufgabe 5. (6 Punkte)

a) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$ für die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit

$$a_n = \frac{(2n+4)\sqrt[5]{32+\frac{1}{n}}}{3n+16}.$$

b) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to 0} f(x)$ für die Funktion $f(x) = \frac{5x+2x^3+5x^7}{2e^{2x}-e^x-1}$.

Begründen Sie in beide Teilaufgaben Ihre Rechenschritte.

Aufgabe 6. (6 Punkte)
Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{12}}{(4n+1)^{12}} x^n$ a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{(2n)^n} x^n$

Geben Sie alle Rechenschritte an (das reine Ergebnis wird nicht als Lösung akzeptiert).

Aufgabe 7. (6 Punkte)
Berechnen Sie die Stammfunktionen von den folgenden Funktionen:

a) $\int x\, e^{4x}\, dx$ b) $\int \sin(x) e^{-2\cos(x)}\, dx$.

Geben Sie alle Rechenschritte an (das reine Ergebnis wird nicht als Lösung akzeptiert).