Vorlesung Analysis für Informatiker **Wintersemester 2019**

2. Vorlesungsklausur

28. Februar 2020

Name:
Matrikelnummer:
(Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer auf extra Blätter, die abgegeben werden.)

Aufgabe 1. (5 Punkte) Kreuzen Sie richtig an:

Der Konvergenzradius einer Potenzreihe kann größer werden, wenn diese abgeleitet wird.	☐wahr $\surd$falsch
Die Menge der berechenbaren reellen Zahlen bilden einen Körper.	$\surd$wahr ☐falsch
Gilt $f(a) < 0 < f(b)$ für eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dann besitzt diese eine Nullstelle.	$\surd$wahr ☐falsch
Jede nach oben beschränkte und monoton fallende Folge $(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ besitzt einen Grenzwert.	☐wahr $\surd$falsch
Wenn f in $\mathbb{R}$ stetig ist, dann ist f in jedem endlichen Intervall von $\mathbb{R}$ integrierbar.	$\surd$wahr ☐falsch

Aufgabe 2. (6 Punkte) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$. Definieren Sie mit Hilfe von Nullfolgen:

a) f besitzt einen Grenzwert $M \in \mathbb{R}$ in x_0.

b) f ist differenzierbar in x_0.

c) f ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe 3. (6 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte und begründen Sie Ihre Rechenschritte.

a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{8e^{2n}+1}{e^{2n}+4e^{n}+1} + \frac{n}{n+1}}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{xe^{x}}$

Aufgabe 4. (6 Punkte) Finden Sie eine Rekurrenz für $g_n \in \mathbb{R}$ so dass folgendes gilt:

$$(1-2x-x^2)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} g_n\, x^n\Big) = 1.$$

Aufgabe 5. (6 Punkte) Entscheiden Sie, ob folgende Reihen konvergieren.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{100}}{n^{100}}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+\pi)}$

Begründen Sie Ihre Antwort (z.B. mit einem Konvergenzkriterium).

Aufgabe 6. (6 Punkte)

Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie mit Hilfe von Nullfolgen dass $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $q(x) = f(x) - g(x)$ differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 7. (6 Punkte) Berechnen Sie die Stammfunktionen von den folgenden Funktionen:

a) $\displaystyle\int x^3\, e^x \, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\frac{1}{x^3} + 5}}{x^4} \, dx$