1. Vorlesungsklausur

7. Feburar 2020

Name:
Matrikelnummer:
(Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer auf extra Blätter, die abgegeben werden.)

Aufgabe 1. (5 Punkte) Kreuzen Sie richtig an:

Die reellen Zahlen können geordnet werden.	$\surd$wahr ☐falsch
Jede reelle Zahl kann mit einem Algorithmus berechnet werden.	☐wahr $\surd$falsch
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ invertierbar. Ist f differenzierbar auf $\mathbb{R}$, dann ist auch f^{-1} differenzierbar auf $\mathbb{R}$.	☐wahr $\surd$falsch
Jede nach unten beschränkte und monoton fallende Folge $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ besitzt einen Grenzwert.	$\surd$wahr ☐falsch
Ist $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergent, dann ist auch $\left(\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)\right)_{n\geq 1}$ konvergent.	$\surd$wahr ☐falsch

Aufgabe 2. (6 Punkte) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$. Definieren Sie:

a) f besitzt einen Grenzwert $M \in \mathbb{R}$ in x_0.

b) f ist stetig in x_0.

c) f ist stetig in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 3. (6 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte und begründen Sie Ihre Rechenschritte.

a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{8n^{100}+1}{2n^{100}+50n^{50}+1} + 5}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{2x+x^2+2x^{10}}{e^{3x}-e^{x}}$

Aufgabe 4. (6 Punkte) Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{(2n+1)^{10}} x^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n} x^n$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{2n}}{n^n} x^n$

Aufgabe 5. (6 Punkte) Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie mit Hilfe von Nullfolgen dass $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $q(x) = f(x) - g(x)$ stetig in $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 6. (6 Punkte) Berechnen Sie die Ableitungen der Funktionen $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ mit[1]

a) $f(x) = (1-x)^a$ wobei $a \in \mathbb{R}$.

b) $f(x) = a^{1-x}$ wobei $a \in (0,\infty)$.

c) $f(x) = (1-x)^{1-x}$.

Aufgabe 7. (6 Punkte) Berechnen Sie die Stammfunktionen von den folgenden Funktionen:

a) $\int \sin(x)^2 \, dx$

b) $\int \sin(x) e^{\cos(x)} \, dx$

---

[1] Hinweis: Verwenden Sie $b^c = e^{c \ln(b)}$.