Analysis für Informatiker
Wintersemester 2019/2020

Carsten.Schneider@risc.jku.at

Bemerkung: Dies ist kein Skript, welches den gesamten Inhalt der Vorlesung abdeckt. Es soll den Studierenden aber während der Teilnahme an der Vorlesung unterstützen. Es beinhaltet die zentralen Definitionen, Lemmas und Sätze, die in dieser Vorlesung besprochen werden. Die entsprechende Motivation, erläuternde Beispiele und Beweise werden an der Tafel herausgearbeitet.

1 Die reellen Zahlen

Definition 1.1. *Im folgenden heißen*

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ *die* Menge der positiven Zahlen,
- $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ *die* Menge der natürlichen Zahlen,
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ *die* Menge der ganzen Zahlen,
- $\mathbb{Q} = \{\frac{k}{n} \mid k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ *die* Menge der rationalen Zahlen.

Für Mengen $M_1, \dots, M_n$ definieren wir das kartesische Produkt mit

$$M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n = \{(m_1, m_2, \dots, m_n) \mid m_i \in M_i \text{ für } 1 \le i \le n\}.$$

Definition 1.2. *Seien M, N Mengen. Eine* Funktion (bzw. Abbildung) von M nach N *ist eine Vorschrift, die jedem Element von M genau ein Element von N zuordnet. Genauer heißt $f \subseteq M \times N$ eine Funktion wenn folgendes gilt:*

1. $\forall (a, b), (\tilde{a}, \tilde{b}) \in f : a = \tilde{a} \Rightarrow b = \tilde{b}$,
2. $\forall a \in M \, \exists b \in N : (a, b) \in f$.

Üblicherweise schreibt man

$$f\colon M \to N, \quad a \mapsto b$$

mit $(a, b) \in f$. Alternativ wird die Zuordnungsvorschrift auch mit $f(a) = b$ beschrieben.

Definition 1.3. *Eine Funktion $\circ\colon M \times M \to M$ wird auch als* Operation auf M *bezeichnet und man verwendet die Notation $a \circ b := \circ(a, b)$.*

Definition 1.4. *Eine Menge $\mathbb{K}$ mit den Verknüpfungen $+\colon \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ und $\cdot\colon \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ heißt* Körper, *wenn folgende Eigenschaften gelten.*

1. $\forall a, b, c \in \mathbb{K} : (a + b) + c = a + (b + c)$;
2. $\forall a, b \in \mathbb{K} : a + b = b + a$;
3. $\exists 0 \in \mathbb{K} \, \forall a \in \mathbb{K} : 0 + a = a$;
4. $\forall a \in \mathbb{K} \, \exists b \in \mathbb{K} : a + b = 0$;
5. $\forall a, b, c \in \mathbb{K} : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
6. $\forall a, b \in \mathbb{K} : a \cdot b = b \cdot a$;
7. $\exists 1 \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \, \forall a \in \mathbb{K} : 1\, a = a$;
8. $\forall a \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \, \exists b \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : a\, b = 1$;

9. $\forall a, b, c \in \mathbb{K}: \ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Bemerkung 1.5. $(\mathbb{K}, +)$ *mit den Eigenschaften (1)–(4) bilden eine kommutative Gruppe.* $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, +)$ *mit den Eigenschaften (5)–(8) bilden eine kommutative Gruppe.* *Eigenschaft (9) verknüpft die beiden Operationen und produziert einen Körper.*

Satz 1.6 (Eigenschaften (I))**.** *Sei K ein Körper mit den Operationen $+$ und $\cdot$. Dann gelten folgende Eigenschaften:*

1. 0 *und* 1 *sind eindeutig.*

2. *Das additive Inverse b von $a \in \mathbb{K}$ (d.h. $a + b = 0$) ist eindeutig und wir schreiben $-a := b$.*

3. *Das multiplikative Inverse b von $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ (d.h. $a\,b = 1$) ist eindeutig und wir schreiben $a^{-1} = \frac{1}{a} := b$.*

Bemerkung 1.7. *Für $a, b \in \mathbb{K}$ schreiben wir $a\,b := a \cdot b$, $a - b := a + (-b)$ und $\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}$.*

Satz 1.8 (Eigenschaften (II))**.** *Sei K ein Körper mit den Operationen $+$ und $\cdot$. Für alle $a, b \in \mathbb{K}$ und $c, d \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ gilt:*

1. $-(-a) = a$ *und* $(c^{-1})^{-1} = c$;

2. *es gibt genau ein $x \in \mathbb{K}$ mit $a + x = b$;*

3. *es gibt genau ein $x \in \mathbb{K}$ mit $c \cdot x = b$;*

4. $a\,b = 0$ *genau dann wenn* $a = 0$ *oder* $b = 0$;

5. $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{a\,d + b\,c}{c\,d}$;

6. $\frac{a}{c}\,\frac{b}{d} = \frac{a\,b}{c\,d}$;

7. $(\frac{c}{d})^{-1} = \frac{d}{c}$;

8. $\frac{a\,d}{c\,d} = \frac{a}{c}$.

Satz 1.9. $\mathbb{Q}$ *ist ein Körper mit den Funktionen*

$$+\colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \quad (\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}) \mapsto \frac{p_1\,q_2 + p_2\,q_1}{q_1\,q_2} \quad \text{und} \quad \cdot\colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \quad (\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}) \mapsto \frac{p_1\,p_2}{q_1\,q_2}.$$

Satz 1.10. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

D.h. $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig: nicht alle Zahlen (Punkte) auf der Zahlengeraden sind enthalten.

Definition 1.11. *Die* Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ *wird gebildet aus allen Dezimalzahlen der Form*

$$\pm d_0, d_1 d_2 d_2 \ldots$$

mit $d_0 \in \mathbb{N}_0$ *und* $d_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. *Eine Dezimalzahl besitzt endlich viele Dezimalstellen, wenn es ein* $r \in \mathbb{N}_0$ *gibt, so dass* $d_i = 0$ *für alle* $i \geq r$ *gilt. Ansonsten besitzt die Dezimalzahl unendlich viele Dezimalstellen. Eine Dezimalzahl ist eine Periode, wenn es* $l, r \in \mathbb{N}_0$ *gibt, so dass* $d_i = d_{i+r-l+1}$ *für alle* $i \in \mathbb{N}_0$ *mit* $i \geq l$ *gilt. In diesem Fall schreiben wir auch*

$$d_0, d_1 d_2 \ldots d_{l-1} \overline{d_l d_{l+1} \ldots d_r}.$$

Satz 1.12. *Jede rationale Zahl* $\frac{k}{n} \in \mathbb{Q}$ *lässt sich als Dezimalzahl mit endlich vielen Ziffern oder als Periode schreiben. Die Periodenlänge kann dabei so gewählt werden, dass sie kleiner als* n *ist.*

Satz 1.13. *Jede periodische Zahl lässt sich als Bruch schreiben.*

Korollar 1.14.

$$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \textit{ ist ist eine Periode oder hat endlich viele Dezimalstellen}\}.$$

Für $d_0 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt

$$d_0 = (d_0 - 1), \bar{9} \in \mathbb{R};$$

und für $d_0 \in \mathbb{Z}$ und $d_1 \ldots, d_k \in \{0, \ldots, 9\}$ mit $d_k \neq 0$ gilt

$$d_0, d_1 d_2 \ldots d_{k-1} d_k = d_0, d_1 d_2 \ldots d_{k-1}(d_k - 1)\bar{9} \in \mathbb{R}.$$

Folglich gilt

$$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ ist eine Periode und hat unendlich viele Dezimalstellen}\} \cup \{0\}.$$

Man beachte, dass die Menge

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ hat unendlich viele Dezimalstellen}\} \cup \{0\} \tag{1}$$

wieder die reellen Zahlen ergibt. Allerdings wird jede reelle Zahle in (1) genau einmal (eindeutig) repräsentiert

1.1 Überabzählbarkeit der reellen Zahlen

Definition 1.15. *Eine Funktion* $f : A \to B$ *heißt*

- injektiv *wenn* $\forall x, y \in A : x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ *gilt,*
- surjektiv *wenn* $\forall y \in B \, \exists x \in A : f(x) = y$ *gilt,*
- bijektiv *wenn* f *injektiv und surjektiv ist.*

Definition 1.16. *Eine Menge* M *heiß* abzählbar *wenn es eine bijektive Funktion* $f : \mathbb{N} \to M$ *gibt. Wenn es keine solche bijektive Funktion gibt, heißt* M *überabzählbar.*

Satz 1.17. $\mathbb{Q}$ *ist abzählbar.*

Satz 1.18. $\mathbb{R}$ *ist überabzählbar.*

1.2 Der geordnete Körper $\mathbb{R}$

Die Addition von reellen Zahlen mit endlich vielen Dezimalstellen ist klar. Doch wie kann man die Addition von Zahlen mit unendlich vielen Dezimalstellen definieren, wie z.B.

$$\pi + \sqrt{2} = 3,1415926\cdots + 1,4142136\ldots .$$

Genauer: wie bestimmt man den Übertrag welcher von $\ldots$ kommt. Natürlich kann man immer weiter nach rechts die Ziffern berechnen. Aber da man nur endlich viele Stellen ermitteln kann, verschiebt sich das Problem lediglich.

Folgende elegante Lösung bietet die Analysis hierfür an. Seien $a = a_0, a_1a_2a_3\ldots$ und $b = b_0, b_1b_2b_3\ldots$ reelle Zahlen, die wir addieren wollen. Wir definieren die rationalen Zahlen

$$a^{(k)} = a_0, a_1a_2\ldots a_k \quad \text{und} \quad b^{(k)} = b_0, b_1b_2\ldots b_k$$

für $k \in \mathbb{N}$. Insbesondere können wir in $\mathbb{Q}$ die rationalen Zahlen

$$c^{(k)} = a^{(k)} + b^{(k)}$$

berechnen. Für diese rationalen Zahlen ergibt sich die folgende unendliche Folge von Ungleichungen:

$$c^{(0)} \leq c^{(1)} \leq c^{(2)} \leq c^{(3)} \leq \ldots$$

Insbesondere gilt $c^{(k)} \leq a_0 + b_0 + 2$. Mit dem wichtigen Satz der Vollständigkeit der reellen Zahlen (siehe später) können wir schließen, dass eine reelle Zahl $c \in \mathbb{R}$ existiert wobei sich $c^{(k)}$ immer genauer an c annähert, d.h.

$$c - c_k$$

wird immer kleiner (und nähert sich immer mehr an 0 an), je größer wir $k \in \mathbb{N}$ wählen. Genauer: dieses c ist genau die Addition von a und b in $\mathbb{R}$.

Analog kann man die Multiplikation von a mit b definieren. Insgesamt folgt (mit weiteren Argumenten) der folgende Satz.

Satz 1.19. *$\mathbb{R}$ mit $+$ und $\cdot$ bilden einen Körper.*

Im folgenden seien alle reellen Zahlen aus der Menge (1) gewählt, d.h. die Eindeutigkeit der Darstellung der reellen Zahlen ist gewährleistet. D.h. die einzige Zahl mit endlichen Dezimalstellen ist $0 = 0,\bar{0}$.

Definition 1.20. *Seien $a = a_0, a_1a_2a_3\ldots, b = b_0, b_1b_2b_3\cdots \in \mathbb{R}$ mit $a_0, b_0 \in \mathbb{N}_0$.*

1. *a **ist kleiner gleich** b ($a \leq b$) wenn $a = b$ gilt (d.h. $a_j = b_j$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$) oder es ein $j \in \mathbb{N}_0$ gibt mit $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_{j-1} = b_{j-1}$ und $a_j < b_j$.*

2. *Es gilt $-a \leq b$.*

3. *Gilt $b \leq a$, definieren wir $-a \leq -b$.*

Lemma 1.21. *$\leq$ ist eine* lineare (bzw. totale) Ordnung auf *$\mathbb{R}$. D.h. für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten folgende Eigenschaften*

1. *$a \leq a$ (Reflexivität);*
2. *$a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$ (Antisymmetrie);*
3. *$a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$ (Transitivität);*
4. *$a \leq b \vee b \leq a$ (Totalität).*

Definition 1.22. *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit $+$ und $\cdot$ und sei $\leq$ eine lineare Ordnung. $\mathbb{K}$ heißt* geordneter Körper*, wenn für all $a, b, c \in \mathbb{K}$ folgende Eigenschaften gelten:*

1. *$a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$;*
2. *$0 \leq a \wedge 0 \leq b \Rightarrow 0 \leq a\,b$.*

Lemma 1.23. *Sei $\mathbb{K}$ mit $+$ und $\cdot$ ein geordneter Körper. Für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt:*

1. *$a \leq b \wedge c \geq 0 \Rightarrow a\,c \leq b\,c$;*
2. *$a \leq b \wedge c \leq 0 \Rightarrow a\,c \geq b\,c$;*
3. *$a \neq 0 \Rightarrow (-a < 0 < a \vee a < 0 < -a)$;*
4. *$a \leq b \wedge c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d$;*
5. *$0 \leq a^2$;*
6. *$a > b > 0 \Rightarrow a^2 \geq b^2$.*

Satz 1.24. *$\mathbb{R}$ mit $+$ und $\cdot$ und der linearen Ordnung $\leq$ von Definition 1.20 bilden einen geordneten Körper.*

Definition 1.25. *Wir definieren die folgenden* Intervalle für *$a, b \in \mathbb{R}$:*

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$,
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$,
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$,
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.

Mit den extra Symbolen $-\infty$ und ∞ definieren wir die Intervalle

- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$,
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$,
- $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$,
- $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$.

1.3 Grundlegende Ungleichungen

Definition 1.26. *Für $a \in \mathbb{R}$ definieren wir $|a| := \max(a, -a) \geq 0$.*

Lemma 1.27 (Dreiecksungleichungen)**.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

1. *$|a + b| \leq |a| + |b|$; Gleichheit gilt gdw. $a\,b \geq 0$.*

2. *$|a + b| \geq ||a| - |b||$; Gleichheit gilt gdw. $a\,b \leq 0$.*

Lemma 1.28 (Bernoullische Ungleichung)**.** *Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in [-1, \infty)$ gilt $(1+x)^n \geq 1 + n\,x$; Gleichheit gilt gdw. $n \in \{0, 1\}$ oder $x = 0$.*

Lemma 1.29 (Ungleichung zwischen geometrischen und arithmetischen Mittel)**.** *Für alle $a, b \in [0, \infty)$: gilt $\sqrt{a\,b} \leq \frac{a+b}{2}$; Gleichheit gilt gdw. $a = b$.*

1.4 (Un)berechenbarkeit der reellen Zahlen

Intuitiv ist es wünschenswert, für eine reelle Zahl $a = a_0, a_1 a_2 a_3 \cdots \in \mathbb{R}$ einen Algorithmus (eine Turingmaschine, ein C-Programm, ein GoTo-Programm,...) zu finden, welcher die Funktion $f \colon \mathbb{N}_0 \to \{0, 1, \ldots, 9\}$ mit $f(n) = a_n$ berechnet.

Eine Schwierigkeit bei dieser Konstruktion ist, dass dann die Addition, Multiplikation und Division von zwei berechenbarer Zahlen nicht notwendigerweise wieder berechenbare Zahlen liefern. Mit folgender Definition kann man dies garantieren.

Definition 1.30. *Eine reelle Zahl $a = a_0, a_1 a_2 a_3 \cdots \in \mathbb{R}$ heißt* **berechenbar** *wenn es einen Algorithmus (eine Turingmaschine, ein C-Programm, ein GoTo-Programm,...) gibt, welcher eine Funktion $f \colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Q}$ berechnet mit*

$$|f(n) - a| < \frac{1}{n}.$$

D.h. je größer n gewählt wird, desto besser kann man die reelle Zahl a mit $f(n)$ approximieren. Insbesondere gilt der Abschluss der Addition/Multiplikation/Division:

Satz 1.31. $\mathbb{B} = \{a \in \mathbb{R} \mid a \text{ ist berechenbar}\}$ *ist ein Unterkörper von $\mathbb{R}$.*

Beispiel 1.32. $\sqrt{2}, \pi, \sqrt{2} + \pi, \sqrt{2}\,\pi, \frac{\sqrt{2}}{\pi} \in \mathbb{B}$.

Man beachte, dass die lineare Ordnung $\leq$ im allgemeinen nicht in $\mathbb{B}$ (und insbesondere nicht in $\mathbb{R}$) berechenbar ist.

Satz 1.33. *Die Menge aller Programme und somit $\mathbb{B}$ sind abzählbar.*

Folglich sind fast alle reellen Zahlen nicht berechenbar.

2 Reellwertige Funktionen

Definition 2.1. *Eine Funktion $f\colon D \to B$ heißt* **reellwertig**, *wenn $B \subseteq \mathbb{R}$ gilt.*

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in D \times B \mid f(x) = y\}$$

heißt der **Graph von** f. *Die* **Bildmenge unter** f *(oder der echte Bildbereich) ist*

$$f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}.$$

Ist $f\colon D \to B$ bijektiv, so heißt die funktionale Zuordnung

$$f^{-1}\colon B \to D, \quad x \mapsto f^{-1}(x)$$

mit $f^{-1}(f(x)) = x$ die **Umkehrfunktion** *zu f.*

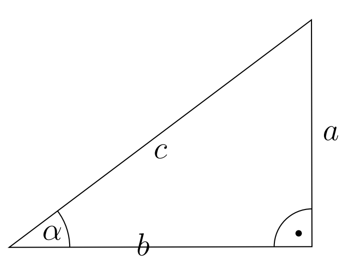
Bemerkung 2.2. *Wenn $f\colon D \to B$ eine reellwertige bijektive Funktion ist und $D \subseteq \mathbb{R}$ gilt, ist auch f^{-1} eine reellwertige Funktion. In diesem Fall kann $\Gamma(f)$ im $\mathbb{R}^2$ dargestellt werden und $\Gamma(f^{-1})$ ist dann die Spiegelung an der Diagonalen $h(x) = x$.*

Folgende elementare Funktionen werden in der Vorlesung z.B. kurz eingeführt:

1. Polynomfunktionen,
2. Betragsfunktionen,
3. Vorzeichenfunktion,
4. Exponentialfunktion mit ganzzahligen Exponenten (Verallgemeinerung später).
5. trigonometrische Funktionen.

Später werden die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen elegant mit Potenzreihen eingeführt. Allerdings fehlen uns im Moment noch die richtigen Hilfsmittel.

Alternativ können die trigonometrischen Funktion auch mit Hilfe der Geometrie eingeführt werden. Für den Winkel $\alpha \in [0°, 90°)$ definieren wir diese Funktionen wie folgt.



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \text{Gegenkathete/Hypotenuse}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \text{Ankathete/Hypotenuse}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \qquad \text{Gegenkathete/Ankathete}$$

$$\cot\alpha = \frac{b}{a} \qquad \text{Ankathete/Gegenkathete}$$

Satz 2.3 (Pythagoras). *Für a, b und c von dem obigen Dreieck gilt $a^2 + b^2 = c^2$.*

Lemma 2.4. *Für $\alpha \in [0°, 90°)$ gelten folgende Eigenschaften.*

1. $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$,
2. $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$,
3. $\cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$,
4. $\sin(\alpha) = \cos(90° - \alpha)$.

Die Erweiterung der trigonometrischen Funktionen auf $[0°, 360°)$ erfolgt auf natürlicherweise mit Hilfe von entsprechenden Spiegelungen am Einheitskreis. Des weiteren können die Funktionen dann mit Hilfe des Bogenmaßes mit beliebigen Längen, d.h. auf ganz $\mathbb{R}$, definiert werden – für weitere Details siehe die Vorlesung.

3 Unendliche Folgen (Listen)

Definition 3.1. *Sei X eine Menge. Eine (unendliche)* **Folge/Liste mit Werten in** *X ist eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \to X$. Wir schreiben auch*

$$(f(1), f(2), f(3), \dots) = (f(n))_{n\geq 1}.$$

Für das nte **Folgeelement (Folgeglied)** *schreibt man auch*

$$a_n := f(n) \in X.$$

D.h. für die Folge f mit den Folgeelementen (Folgegliedern) a_n schreiben wir

$$f = (a_1, a_2, a_3, \dots) = (a_n)_{n\geq 0}$$

Gilt $X = \mathbb{R}$ spricht man auch von **reellwertigen Folgen***.*

Definition 3.2. *Sei M eine Menge. Dann schreiben wir für die Menge der M-wertigen Folgen auch*

$$M^{\mathbb{N}} = \{(a_n)_{n\geq 1} \mid a_n \in M\}.$$

Für die Menge der reellwertigen Folgen

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(a_n)_{n\geq 1} \mid a_n \in \mathbb{R}\}$$

definieren wir folgende Operationen:

$$\begin{aligned} +&\colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad ((a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}) \mapsto (a_n + b_n)_{n\geq 1},\\ \cdot&\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad (\lambda, (a_n)_{n\geq 1} \mapsto (\lambda a_n)_{n\geq 1}. \end{aligned}$$

Lemma 3.3. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *mit $+$ und $\cdot$ bildet einen Vektorraum über $\mathbb{R}$.*

3.1 Konvergenz und Divergenz

Für $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ definieren wir die ε-Umgebung von $a \in \mathbb{R}$ mit

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid |a - x| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

Beachte: es gilt

$$b \in U_\varepsilon(a) \Leftrightarrow |a - b] < \varepsilon.$$

Basierend darauf führen wir die folgenden zentralen Begriffe der Analysis ein.

Definition 3.4.

- *Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ und $a \in \mathbb{R}$. $(a_n)_{n\geq 1}\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ wird in der Umgebung $U_\varepsilon(a)$ **sesshaft** wenn folgendes gilt:*

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_\varepsilon : a_n \in U_\varepsilon(a)$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_\varepsilon : \, |a - a_n| < \varepsilon.$$

- *Sei $a \in \mathbb{R}$. $(a_n)_{n\geq 1}\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ **konvergiert gegen den Grenzwert** a wenn für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ in $U_\varepsilon(a)$ sesshaft wird. D.h. wenn folgendes gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_\varepsilon : \, a_n \in U_\varepsilon(a)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_\varepsilon : \, |a - a_n| < \varepsilon.$$

- *$(a_n)_{n\geq 1}\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ heißt **konvergent**, wenn es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt sodass $(a_n)_{n\geq 1}$ gegen a konvergiert. D.h. es gilt*

$$\exists a \in \mathbb{R}\, \forall \varepsilon > 0\, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_\varepsilon : \, a_n \in U_\varepsilon(a)$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists a \in \mathbb{R}\, \forall \varepsilon > 0\, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_\varepsilon : \, |a - a_n| < \varepsilon.$$

Satz 3.5. *Seien $a, \tilde{a} \in \mathbb{R}$ und $(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Wenn $(a_n)_{n\geq 1}$ gegen a und $\tilde{a}$ konvergiert, so gilt $a = \tilde{a}$.*

Definition 3.6 (oder Notation)**.** *Wenn $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergent ist, so schreibt man*

$$\boxed{a = \lim_{n\to\infty} a_n} \text{ oder } \boxed{a_n \to a \text{ für } n \to \infty}$$

für den eindeutigen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ gegen den $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert.

Satz 3.7. *Falls $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergent sind mit $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim_{n\to\infty} b_n$, so gilt:*

1. $(a_n + b_n)_{n\geq 1}$ *ist konvergent mit* $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.
2. $(\lambda a_n)_{n\geq 1}$ *ist konvergent mit* $\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n) = \lambda\, a$.
3. $(a_n\, b_n)_{n\geq 1}$ *ist konvergent mit* $\lim_{n\to\infty}(a_n\, b_n) = a\, b$.
4. *Gilt* $a_n \neq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $a \neq 0$, *dann ist* $(\frac{1}{a_n})_{n\geq 1}$ *konvergent mit* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$.
5. *Sei* $a_n \geq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$. $(\sqrt[p]{a_n})_{n\geq 1}$ *ist konvergent mit* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{a}$.
6. $(|a_n|)_{n\geq 1}$ *ist konvergent mit* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

Kurzschreibweise: Sei $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Anstelle von "$(a_n)_{n\geq 1}$ ist konvergent und es gilt $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ für $a \in \mathbb{R}$" schreibt man kurz

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}.$$

Definition 3.8. *Ist eine Folge* $(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *nicht konvergent, heißt sie* **divergent**. *Wenn dann der Spezialfall*

$$\forall T \in \mathbb{R}\, \exists n_T \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_T :\ a_n \geq T$$

gilt, hat sie den uneigentlichen Grenzwert ∞ *und man schreibt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Analog schreibt man

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

falls $\lim_{n\to\infty} -a_n = \infty$ *gilt.*

3.2 Das Verhalten von Folgen in $\mathbb{R}$

Definition 3.9. $(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *heißt*

- **monoton wachsend** *wenn folgendes gilt:*

$$\forall n, m \in \mathbb{N} :\ n \leq m \Rightarrow a_n \leq a_m;$$

- **monoton** *fallend wenn folgendes gilt:*

$$\forall n, m \in \mathbb{N} :\ n \leq m \Rightarrow a_n \geq a_m;$$

- **nach oben beschränkt** *wenn folgendes gilt:*

$$\exists T \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N} :\ a_n \leq T;$$

- *nach unten beschränkt wenn folgendes gilt:*

$$\exists T \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N}: \, T \leq a_n.$$

Satz 3.10 (Vollständigkeit der reellen Zahlen)**.** *Jede nach oben beschränkte monoton wachsende Folge $(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist konvergent. D.h. es gibt ein eindeutiges $a \in \mathbb{R}$ mit*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Analog gilt der folgende Satz.

Satz 3.11 (Vollständigkeit der reellen Zahlen II)**.** *Jede nach unten beschränkte monoton fallende Folge $(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist konvergent. D.h. es gibt ein eindeutiges $a \in \mathbb{R}$ mit*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Definition 3.12. *Sei $a = (a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. $T \in \mathbb{R}$ heißt Supremum von a wenn folgende zwei Eigenschaften gelten:*

1. *für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \leq T$;*
2. *T ist die kleinste Wahl: für jedes $\tilde{T} \in \mathbb{R}$ mit*

$$\forall n \in \mathbb{N}: \, a_n \leq \tilde{T}$$

   gilt $\tilde{T} \geq T$.

Nicht jede Folge besitzt ein Supremum. Wenn es aber eines gibt, ist es mit Eigenschaft 2 der obigen Definition eindeutig. In diesem Fall schreiben wir

$$T := \sup_{n\geq 1} a_n$$

oder auch $T := \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Wenn die ersten $k-1$ Glieder von a nicht berücksichtigt werden sollen, schreiben wir auch

$$\sup_{n\geq k} a_n := \sup_{n\geq 1} a_{n+k-1}.$$

Definition 3.13. *Sei $a = (a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit dem Supremum $T = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \in \mathbb{R}$. T heißt Maximum von a wenn $T \in \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ gilt.*

Satz 3.14. *Jede nach oben beschränkte Folge $(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ besitzt ein Supremum. D.h. es gibt ein eindeutiges $a \in \mathbb{R}$ mit*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = a.$$

Allerdings muss der Grenzwert nicht existieren (die Existenz ist abgesichert, wenn die Folge auch monoton wachsend ist). Wenn man sich allerdings unendlich viele Folgeelemente auswählt, kann diese Teilfolge einen Grenzwert besitzen. Dieser Grenzwert wird dann als Häufungspunkt der Folge genannt.

Definition 3.15. *Sei* $a = (a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- *Wir nennen*
$$(a_{n_k})_{k\geq 1} = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots)$$
eine **Teilfolge von** a, *wenn* $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ *gilt.*

- $b \in \mathbb{R}$ *ist ein* **Häufungspunkt von** a, *wenn es eine Teilfolge von* a *gibt, dessen Grenzwert* b *ist.*

Das Maximum aller Häufungspunkte kann dabei mit dem Limes Suprior von $(a_n)_{n\geq 1}$ in Verbindung gebracht werden. Weitere Erklärungen der folgenden Definition werden in der Vorlesung behandelt.

Definition 3.16. *Sei* $a = (a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(1) Ist a *nach oben beschränkt und ist* $(\sup_{n\geq k} a_n)_{k\geq 1}$ *nach unten beschränkt, setzen wir*
$$\limsup_{k\to\infty} a_k := \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geq k} a_n \in \mathbb{R}.$$

(2) Ist a *nach oben beschränkt und ist* $(\sup_{n\geq k} a_n)_{k\geq 1}$ *nicht nach unten beschränkt, setzen wir*
$$\limsup_{k\to\infty} a_k := -\infty.$$

(3) Ist a *nicht nach oben beschränkt, setzen wir*
$$\limsup_{k\to\infty} a_k := \infty.$$

Im ersteren Fall ist die Folge a nach oben beschränkt, es existiert mindestens ein Häufungspunkt und das Maximum aller Häufungspunkte ist die reelle Zahl $\limsup_{k\to\infty} a_k$. Im zweiten Fall ist die Folge nach oben beschränkt, aber jede Teilfolge hat den uneigentlichen Grenzwert $-\infty$. In dritten Fall gibt es mindestens eine Teilfolge, welche den uneigentlichen Grenzwert ∞ hat.
Ist a nach oben und unten beschränkt, befinden wir uns im Fall (1): $\limsup_{k\to\infty} a_k \in \mathbb{R}$.

Man beachte, dass der Limes Superior für alle Folgen definiert ist und den Wert $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ annimmt. Insbesondere ist dieser eine Verallgemeinerung des Grenzwerts: Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$, so folgt
$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

4 Stetigkeit

Definition 4.1. *Eine Folge $(h_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ heißt* **Nullfolge** *wenn $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ gilt.*

Definition 4.2. *Sei $x \in (a,b)$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$. Weiters, sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $D = (a,b)$ oder $D = (a,b) \setminus \{x\}$. f besitzt den* **Grenzwert** *$M \in \mathbb{R}$* **in dem Punkt** *x wenn*

$$\lim_{n\to\infty} f(x+h_n) = M$$

für alle Nullfolgen $(h_n)_{n\geq 1}$ mit[1] $x + h_n \in (a,b) \setminus \{x\}$ gilt. In diesem Fall schreiben wir

$$M = \lim_{h\to 0} f(x+h) = \lim_{\zeta\to x} f(\zeta).$$

Definition 4.3. *Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ und $b \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$.*

1. *f heißt* **stetig in** *$x \in (a,b)$ wenn f einen Grenzwert M in x besitzt und $f(x) = M$ gilt.*

2. *f heißt* **stetig in** *(a,b) wenn f stetig in x für all $x \in (a,b)$ ist.*

Zusammenfassend:

$$\underbrace{\forall x \in (a,b)\ \underbrace{\forall (h_n)_{n\geq 1} \in ((a-x, b-x)\setminus\{0\})^{\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} h_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x+h_n) = f(x)}_{f \text{ ist stetig in } x}}_{f \text{ ist stetig in } (a,b)}$$

Bemerkung: Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $D = (a,b) \subseteq \mathbb{R}$. Für "$f$ ist stetig in D", sagen wir in Kurzform auch: "f ist stetig".

Satz 4.4. *Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ und $b \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ und sei $x \in (a,b)$. Folgende Aussagen sind äquivalent.*

1. *$\lim_{\zeta\to x} f(\zeta) = f(x)$ (d.h. f ist stetig in x).*

2. *$\forall (x_n)_{n\geq 1} \in (a,b)^{\mathbb{R}} : \lim_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$*

3. *$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall \zeta \in (a,b) :\ |\zeta - x| < \delta \Rightarrow |f(\zeta) - f(x)| < \epsilon$.*

Satz 4.5. *Seien $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ und $g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig in (a,b). Dann gilt*

1. *$f + g$ ist stetig in (a,b).*

2. *$f\,g$ ist stetig in (a,b).*

3. *Gilt $g(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$, dann ist auch $\frac{f}{g}$ stetig in (a,b).*

[1] Oder äquivalent $h_n \in (a-x, b-x) \setminus \{0\}$.

Satz 4.6. *Seien* $f\colon (a,b) \to (c,d)$ *und* $g\colon (c,d) \to \mathbb{R}$ *stetig. Dann ist*

$$g \circ f\colon (a,b) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(f(x))$$

stetig in (a,b).

Satz 4.7 (Zwischenwertsatz)**.** *Sei* $f\colon (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ *stetig in* (α,β) *und* $a,b \in \mathbb{R}$ *mit* $\alpha < a < b < \beta$ *wobei* $f(a) < 0$ *und* $f(b) > 0$ *gilt. Dann existiert ein* $\zeta \in (a,b)$ *mit* $f(\zeta) = 0$.

5 Unendliche Reihen

Definition 5.1. *Sei* $(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. *Die* n*-te* **Partialsumme** *ist*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \in \mathbb{R}.$$

Falls $(s_n)_{n\geq 1}$ *gegen* $S \in \mathbb{R}$ *konvergiert, d.h., der Grenzwert*

$$S = \lim_{n\to\infty} s_n$$

mit $S \in \mathbb{R}$ *existiert, so heißt die Reihe* **konvergent**, *andernfalls* **divergent**. *Ist die Reihe konvergent, schreiben wir*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = S;$$

in Kurzform sagen wir auch dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergent ist. Ist die Reihe divergent, sagen wir auch dass* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *divergent ist. Hat diese den uneigentlichen Grenzwert* $\infty/-\infty$, *so schreiben wir auch*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \infty/-\infty.$$

Satz 5.2 (Nullfolgenkriterium)**.** *Sei* $(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Ist $(a_n)_{n\geq 1}$ *divergent order gilt* $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, *dann divergiert* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Satz 5.3 (Vergleichskriterium)**.** *Seien* $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(a) Majorantenkriterium: Gilt

$$0 \leq a_k \leq b_k$$

für alle $k \geq k_0$ *für ein* $k_0 \in \mathbb{N}$ *und konvergiert* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, *dann konvergiert* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *und es gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

(b) Minorantenkriterium: Gilt $0 \leq a_k \leq b_k$ *für alle* $k \geq k_0$ *für ein* $k_0 \in \mathbb{N}$ *und divergiert* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, *dann divergiert* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Lemma 5.4. *Sei $(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Konvergiert $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_n|$, dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und es gilt*

$$|\sum_{k=1}^{\infty} a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

Satz 5.5 (verallgemeinertes Majorantenkriterium). *Seien $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Gilt*

$$0 \leq |a_k| \leq b_k$$

für alle $k \geq k_0$ für ein $k_0 \in \mathbb{N}$ und konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, dann konvergieren $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und es gilt

$$|\sum_{k=1}^{\infty} a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Satz 5.6 (Quotientenkriterium). *Sei $(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ wobei $a_k \neq 0$ für all $k \in \mathbb{N}$ und nimm an, dass*

$$q := \lim_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| \in \mathbb{R}$$

gilt. Dann konvergieren $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ falls $0 \leq q < 1$ und divergieren falls $q > 1$.

Achtung: Für $q = 1$ kann keine Aussage getroffen werden. In diesem Fall müssen andere Argumente eingesetzt werden.

Mit Hilfe des Quotientenkriteriums (siehe Beispiel in der VO) können wir folgende Funktion einführen.

Definition 5.7. *Wir definieren exp: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Insbesondere setzen wir $e := \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 2,71828\cdots \in \mathbb{R}$ (welches die Eulersche Zahl ist). In Kurzform schreiben wir auch $e^x := exp(x)$. Die Rechtfertigung dieser Kurzschreibweise kommt später.*

Satz 5.8 (Wurzelkriterium). *Sei $(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ und setze*

$$q := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Dann konvergieren $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ falls $q \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq q < 1$ gilt und divergieren falls $q = \infty$ oder $q > 1$ gelten.

Achtung: Für $q = 1$ kann keine Aussage getroffen werden. In diesem Fall müssen andere Argumente eingesetzt werden.

6 Potenzreihen (erste Grundlagen)

Definition 6.1. *Eine Potenzreihe (in einer Variablen x) ist eine unendliche Reihe*

$$f(x) = \sum_{n=\lambda}^{\infty} a_n (x - c)^n$$

mit $a_n \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{N}_0$.

Bemerkung: In dieser Vorlesung setzen wir $c = 0$ und $\lambda = 0,1$.

Satz 6.2. *Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ eine Potenzreihe. Es gibt ein r mit $r = \infty$ oder $r \in [0, \infty)$ mit folgenden Eigenschaften:*

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ *ist konvergent für alle*[2] $|x| < r$;
- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ *ist divergent für alle*[3] $|x| > r$.

Bemerkung (siehe Beweis): Setze $L := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Dann gilt

$$r = \begin{cases} \frac{1}{L} & \text{wenn } L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; \\ \infty & \text{wenn } L = 0; \\ 0 & \text{wenn } L = \infty. \end{cases}$$

Definition 6.3. *Die eindeutige Zahl $r \in \mathbb{R}$ oder $r = \infty$ ist der* Konvergenzradius von *f.*

Definition 6.4 (und Beispiel)**.**

Potenzreihe	*Konvergenzradius*
$e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$r = \infty$
$\ln(1-x) := -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$	$r = 1$
$\ln(1+x) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$	$r = 1$
$\sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$r = \infty$
$\cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$r = \infty$
$\sqrt{x+1} := 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 8}x^4 + \dots$	$r = 1.$

Satz 6.5. *Seien $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, x^n$ und $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n\, x^n$ Potenzreihen mit den Konvergenzradien $r_1 \neq 0$ und $r_2 \neq 0$. Setze $r = \min(r_1, r_2)$. Dann gilt:*

1. *$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n + g_n) x^n$ ist eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\geq r$ und es gilt*

$$h(x) = f(x) + g(x) \quad \forall |x| < r.$$

[2] Für $r = \infty$ bedeutet $|x| < r = \infty$ dass $x \in \mathbb{R}$ gilt.
[3] Für $r = \infty$ gibt es kein x mit $x > \infty$, d.h. diese Eigenschaft ist trivialerweise immer gültig.

2. $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} f_k\, g_{n-k})\, x^n$ *ist eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $\geq r$ *und es gilt*
$$h(x) = f(x)\, g(x) \quad \forall |x| < r.$$

Satz 6.6. *Sei* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $r \neq 0$. *Dann ist* f *stetig in* $(-r, r)$.

Satz 6.7. *Seien* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, x^n$ *und* $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n\, x^n$ *Potenzreihen mit den Konvergenzradien* $r_1 \neq 0$ *und* $r_2 \neq 0$. *Gibt es ein* $\alpha > 0$ *mit*
$$f(x) = g(x) \quad \forall x \in (-\alpha, \alpha)$$
so gilt
$$f_n = g_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Satz 6.8. *Sei* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, x^n$ *eine Potenzreihe mit* $f_0 \neq 0$ *mit dem Konvergenzradius* $r \neq 0$. *Dann gibt es eine Potenzreihe* $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n\, x^n$ *mit Konvergenzradius* $\tilde{r} > 0$ *mit*
$$f(x)\, g(x) = g(x)\, f(x) = 1\, (= 1 + 0\, x^1 + 0\, x^2 + 0\, x^3 + \dots)$$

Satz 6.9. *Seien* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, x^n$ *und* $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n\, x^n$ *Potenzreihen mit den Konvergenzradien* $r_1 \neq 0$ *und* $r_2 \neq 0$ *wobei* $f_0 < r_2$ *gilt. Dann gibt es ein* $\rho > 0$ *mit*
$$f(x) < r_2 \quad \forall x \in (-\rho, \rho).$$
Insbesondere ist die Funktion
$$h(x) = g(f(x))$$
für $x \in (-\rho, \rho)$ *definiert und es gibt eine Potenzreihe* $\tilde{h}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n\, x^n$ *mit Konvergenzradius* $\geq \rho$ *so dass*
$$h(x) = \tilde{h}(x) \quad \forall x \in (-\rho, \rho)$$
gilt.

7 Differenzierbarkeit

Definition 7.1. *Sei* $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ *mit* $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$.

1. f *heißt* differenzierbar in $x_0 \in (a, b)$ *wenn es ein* $M \in \mathbb{R}$ *mit*
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = M$$
gibt; d.h. wenn es ein $M \in \mathbb{R}$ *gibt so dass für alle Nullfolgen* $(h_n)_{n \geq 1}$ *mit* $h_n + x_0 \in (a, b)$ *und* $h_n \neq 0$ *folgendes gilt:*
$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} = M.$$
In diesem Fall schreibt man auch $f'(x_0) = M$ *und nennt den Wert* M *die erste Ableitung von* f *in* x_0.

2. *f heißt* **differenzierbar auf** *(a,b) wenn f in jedem Punkt $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar ist. In diesem Fall nennt man*

$$f'\colon (a,b) \to \mathbb{R}, \quad x_0 \mapsto f'(x_0)$$

die Ableitung(sfunktion) von f.

3. *Ist auch $f'\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf (a,b) (d.h. f ist zweifach differenzierbar), so heißt die Ableitungsfunktion $(f')'$ von f' auch zweite Ableitungsfunktion von f und wir schreiben $f'' = (f')'$. Analog wird die dritte, vierte, etc. Ableitungsfunktion eingeführt, wenn f dreifach, vierfach etc. differenzierbar ist. Für die $n$te Ableitungsfunktion ($n \geq 0$) schreiben wir auch[4] $f^{(n)}(x)$.*

Bemerkung: Anstatt $f'(x)$ schreibt man auch $\frac{df}{dx}(x)$ oder $\frac{d}{dx}f(x)$.

Satz 7.2. *Ist $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in (a,b)$, dann ist f stetig in x_0. Ist f differenzierbar auf (a,b), dann ist f stetig in (a,b).*

Satz 7.3. *Seien $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ und $g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf (a,b). Dann gilt:*

1. *$f+g$ ist differenzierbar auf (a,b) und es gilt $(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x)$ für $x \in (a,b)$.*

2. *fg ist differenzierbar auf (a,b) und es gilt $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ für $x \in (a,b)$.*

3. *Gilt $g(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$, dann ist $\frac{f}{g}$ differenzierbar auf (a,b) und es gilt $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ für $x \in (a,b)$.*

Satz 7.4. *Seien $f\colon (a,b) \to (c,d)$ und $g\colon (c,d) \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf (a,b) und (c,d). Dann ist $g \circ f$ differenzierbar auf (a,b) und für alle $x \in (a,b)$ gilt*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x).$$

Satz 7.5. *Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r \neq 0$. Dann ist f differenzierbar auf $(-r,r)$ und für alle $x \in (-r,r)$ gilt*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n\, x^{n-1}.$$

Insbesondere ist der Konvergenzradius von f' wieder r.

Definition 7.6. *Sei $a \in (0,\infty)$ und $x \in \mathbb{R}$. Wir definieren*

$$a^x := e^{x \ln(a)}.$$

[4]D.h. $f^{(0)} := f$, $f^{(1)} := f'$, $f^{(2)} := f''$, $f^{(3)} := f'''$, ...

Satz 7.7. *Sei $f\colon (a,b) \to (c,d)$ bijektiv und differenzierbar und gelte $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann ist f^{-1} differenzierbar auf (a,b) und für alle $x \in (a,b)$ gilt*

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Satz 7.8 (Mittelwertsatz)**.** *Sei $f\colon (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf (α,β) und seien $a,b \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < a < b < \beta$. Dann existiert ein $\zeta \in (a,b)$ mit $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\zeta)$.*

Satz 7.9 (de l'Hospital)**.** *Seien $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ und $g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf (a,b). Sei $\tilde{x} \in (a,b)$ mit*

$$f(\tilde{x}) = g(\tilde{x}) = 0$$

und gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b) \setminus \{\tilde{x}\}$. Gilt

$$L := \lim_{x \to \tilde{x}} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R},$$

so existiert der Grenzwert von $\frac{f}{g}$ in $\tilde{x}$ und es gilt

$$\lim_{x \to \tilde{x}} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Definition 7.10. *Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ mit $a,b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty,\infty\}$.*

1. *x_0 heißt* (globale) Minimalstelle (Maximalstelle) *von f wenn folgendes gilt:*

$$\forall x \in (a,b): \quad f(x) \geq f(x_0) \quad (f(x) \leq f(x_0)).$$

2. *x_0 heißt* lokale Minimalstelle (Maximalstelle) *von f wenn folgendes gilt:*

$$\exists \varepsilon > 0 \, \forall x \in U_\varepsilon(x_0): \quad f(x) \geq f(x_0) \quad (f(x) \leq f(x_0)).$$

3. *Eine* Extremstelle *ist eine lokale Minimalstelle oder Maximalstelle.*

Satz 7.11. *Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf (a,b). Dann gilt:*

1. *Ist $x_0 \in (a,b)$ eine Extremstelle, dann gilt $f'(x_0) = 0$.*
2. *Ist f n-mal differenzierbar und gilt*

$$f^{(1)}(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)} \neq 0,$$

   so gilt:

   (a) *x_0 ist eine lokale Minimalstelle falls n gerade und $f^{(n)} > 0$ ist;*
   (b) *x_0 ist eine lokale Maximalstelle falls n gerade und $f^{(n)} < 0$ ist;*

(c) x_0 ist keine Extremstelle falls n ungerade ist.

Satz 7.12 (Formel von Taylor, 1685-1731)**.** *Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal differenzierbar auf (a,b). Dann gilt für $x_0, x \in (a,b)$*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_{n+1}(x,x_0)$$

mit

$$R_{n+1}(x,x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

wobei ξ zwischen x_0 und x liegt.

Satz 7.13 (Formel von Taylor, Teil 2)**.** *Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar auf (a,b) und seien $x, x_0 \in (a,b)$. Gilt*

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x,x_0) = 0,$$

so folgt

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

8 Indefinite Integration (Stammfunktion)

Definition 8.1. *Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ mit $a,b \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Eine differenzierbare Funktion $F\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ auf (a,b) heißt Stammfunktion von f, wenn*

$$F'(x) = f(x)$$

für alle $x \in (a,b)$ gilt.

Satz 8.2. *Seien F und $\tilde{F}$ Stammfunktionen von $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$. Dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit*

$$f(x) - \tilde{f}(x) = c$$

für alle $x \in (a,b)$.

Notation: Sei F eine Stammfunktion von $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$. Dann schreibt man

$$\int f(x)\,d\,x = F(x) + c$$

für die Gesamtheit aller Stammfunktionen.

Stammfunktionen elementarer Funktionen:

$f(x)$	$\int f(x)dx$
0	c
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c, \quad n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$
e^x	$e^x + c$
a^x	$\frac{1}{\ln(a)}a^x + c, \quad a \in (0,\infty) \setminus \{1\}$
$\ln(x)$	$x\,(\ln(x)-1)+c, \quad x \in (0,\infty)$
$\log_a(x)$	$\frac{x}{\ln(a)}(\ln(x)-1)+c, \quad x \in (0,\infty), a \in (0,\infty) \setminus \{1\}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)+c$
$\cos(x)$	$\sin(x)+c$
$\vdots$	

Satz 8.3 (Integrationsregeln)**.**

1. *Summe:* $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
2. *konstanter Faktor:* $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$ *für* $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. *partielle Integration:* $\int f(x)g'(x)dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)g(x)dx$
4. *Substitution:* $\int f(g(x))g'(x)dx = (\int (f(y)dy)|_{y \mapsto g(x)}$.

Variante der Substitutionsregel: Wenn g entsprechend invertierbar ist, gilt

$$\int f(y)dy = \int f(g(x))g'(x)dx|_{x \mapsto g^{-1}(y)}.$$

9 Definite Integration (Riemannsche Definition)

Wir führen folgende Begriffe/Konstruktionen für eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$ ein.

- $X = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ heißt eine Zerlegung von (a,b), wenn $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ mit

  $$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

  gilt.

- Die Feinheit von X wird definiert mit

$$\Phi(x) = \max_{1 \leq j \leq n} (x_j - x_{j-1}).$$

- $Z = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ heißt Zwischenpunktvektor von X, wenn $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$$

  für $1 \leq i \leq n$ gilt.

- Die Riemann-Summe bzgl. X und Z ist

$$S(X, Z) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Definition 9.1. *Eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$ und heißt Riemann-integrierbar wenn für jede Folge $(X_n)_{n\geq 1}$ von Zerlegungen X_n mit $\lim_{n\to\infty} \Phi(X_n) = 0$ und jedem zugehörigen Zwischenvektor Z_k von X_k gilt, dass die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = S(X_n, Z_n) \in \mathbb{R}$ konvergiert.*

Satz 9.2. *Ist f Riemann-integrierbar, so ist der Grenzwert $(S(X_n, Z_n))_{n\geq 1}$ für jede Folge von Zerlegungen X_n mit $\lim_{n\to\infty} \Phi(X_n) = 0$ und jeden entsprechenden Zwischenvektoren Z_n identisch.*

Definition 9.3. *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$ Riemann-integrierbar. Der eindeutig bestimmte Grenzwert heißt bestimmtes Integral von f auf $[a,b]$ und wird mit*

$$\int_a^b f(x)dx$$

bezeichnet.

Satz 9.4. *Sei $f\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\alpha < \beta$ stetig. Dann ist f auf dem Intervall $\{0\} \neq [a,b] \subseteq (\alpha, \beta)$ Riemann-integrierbar.*

Definition 9.5. *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar mit $a < b$. Wir definieren*

$$\int_a^a f(x)dx := 0$$
$$\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x).$$

Satz 9.6. *Sei $f\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\alpha < \beta$. Für $a, b, c \in [\alpha, \beta]$ gilt*

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx.$$

Satz 9.7 (Zweiter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**.** *Sei* $f\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ *stetig mit* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *und* $\alpha < \beta$. *Sei* F *eine Stammfunktion von* f. *Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (=: F(x)|_{x=a}^{x=b})$$

für alle $a, b \in (\alpha, \beta)$.