Vorlesungsklausur

26. Februar 2019

Name:
Matrikelnummer:
(Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer auf alle extra Blätter, die abgegeben werden.)

Aufgabe 1. (5 Punkte) Kreuzen Sie richtig an:

Seien $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, x^n$ und $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n\, x^n$ Potenzreihen mit Konvergenzradien $r_f > 0$ und $r_g > 0$. Dann gibt es eine Potenzreihe $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n\, x^n$ mit $h(x) = f(x)g(x)$ für alle $\lvert x\rvert \leq \min(r_f, r_g)$.	$\surd$wahr ☐falsch
Sei $(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Aus $\lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$ folgt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-a_n} \in \mathbb{R}$.	☐wahr $\surd$falsch
Die Menge der reellwertigen Funktionen ist abzählbar.	☐wahr $\surd$falsch
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ist das Produkt f^2 differenzierbar, so ist auch f differenzierbar.	☐wahr $\surd$falsch
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ist f differenzierbar, so ist auch das Produkt f^2 differenzierbar.	$\surd$wahr ☐falsch

Aufgabe 2. (6 Punkte) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$. Definieren Sie mit Hilfe von Nullfolgen:

a) f besitzt einen Grenzwert $M \in \mathbb{R}$ in x_0.

b) f ist differenzierbar in x_0.

c) f ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe 3. (6 Punkte) Berechnen Sie den Grenzwert

a) der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \sqrt[5]{\frac{3e^n+2}{e^n+1}}$, d.h. $\lim_{n\to\infty} a_n$;

b) der Funktion $h(x) = \frac{\sin(\pi\, x)}{\ln(x)}$ in 1, d.h. $\lim_{x\to 1} h(x)$.

Begründen Sie Ihre Rechenschritte.

Aufgabe 4. (6 Punkte) Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie mit Hilfe Ihrer Definition von Aufgabe 2 c) dass $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) + g(x)$ differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 5. (6 Punkte) Haben die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lokale Maximal- oder Minimalstellen bei $x = 0$? Wenn ja, bestimmen Sie, ob es eine Maximal- oder eine Minimalstelle ist.

a) $f(x) = x^{22} - x^{20}$ b) $f(x) = x^{22} + x^{21}$

Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 6. (6 Punkte) Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen und begründen Sie jeweils die Rechenschritte:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{e^n} x^n$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{(2n+1)^n} x^n$ c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$

Aufgabe 7. (6 Punkte) Berechnen Sie die Stammfunktionen von den folgenden Funktionen:
a) $\int (e^x + \cos(x))\, dx$ b) $\int x^2\, e^x\, dx$ c) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+1}}\, dx$