Vorlesungsklausur

7. Februar 2019

Name:
Matrikelnummer:
(Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer auf alle extra Blätter, die abgegeben werden.)

Aufgabe 1. (5 Punkte) Kreuzen Sie richtig an:

$\sqrt{3}$ ist eine rationale Zahl.	☐wahr $\surd$falsch
Die Menge der berechenbaren reellen Zahlen ist abzählbar.	$\surd$wahr ☐falsch
Eine nach unten beschränkte Folge hat ein Supremum.	☐wahr $\surd$falsch
Sei $\sum_{n=0}^{\infty} f_n\, x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Dann bildet $f : (-r, r) \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, x^n$ eine Funktion und ist auf $(-r, r)$ differenzierbar.	$\surd$wahr ☐falsch
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine beliebige Funktion. Wenn f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, dann ist $\frac{1}{f}$ in $\mathbb{R}$ stetig.	$\surd$wahr ☐falsch

Aufgabe 2. (6 Punkte) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$. Definieren Sie mit Hilfe von Nullfolgen:

a) f besitzt einen Grenzwert $M \in \mathbb{R}$ in x_0.
b) f ist stetig in x_0.
c) f ist stetig in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 3. (6 Punkte) Berechnen Sie den Grenzwert

a) der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \frac{(2n+3)(n+1)(3n+4)(5n+1)}{(2n^3+1234n+1)(2n+1)}$, d.h. $\lim_{n\to\infty} a_n$;
b) der Funktion $f(x) = \frac{\ln(x)}{2x^2-x-1}$ in 1, d.h. $\lim_{x\to 1} f(x)$.

Begründen Sie Ihre Rechenschritte.

Aufgabe 4. (6 Punkte) Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie mit Hilfe Ihrer Definition von Aufgabe 2 c) dass $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto (f(x) + g(x))\, f(x)$ stetig in $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 5. (6 Punkte) Bestimmen Sie eine Formel für $f_n \in \mathbb{R}$ (d.h. eine Rekurrenz in f_n, f_{n-1} und f_{n-2} mit den Startwerten $f_0 \in \mathbb{Q}$ und $f_1 \in \mathbb{Q}$), so dass Folgendes gilt:

$$\Big(1 + x - x^2\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\, x^n\Big) = 1.$$

Aufgabe 6. (6 Punkte) Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen und begründen Sie jeweils die Rechenschritte:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n n^3}{5^n} x^n$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{n+1}\right)^n x^n$ c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)}{n!^2} x^n$

Aufgabe 7. (6 Punkte) Berechnen Sie die Stammfunktionen von den folgenden Funktionen:
a) $\int \frac{x^6+x^2+1}{x^3}\, dx$ b) $\int x^4 \ln(x)\, dx$ c) $\int e^{-\frac{x}{4}}\, dx$