2. Vorlesungsklausur

2. März 2018

Name:
Matrikelnummer:
(Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer auf extra Blätter, die abgegeben werden.)

Aufgabe 1. (5 Punkte) Kreuzen Sie richtig an:

Sind $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ berechenbar, so ist auch $a+b$ berechenbar.	$\surd$wahr ☐falsch
Jede nach unten beschränkte Folge besitzt ein Supremum.	☐wahr $\surd$falsch
Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ für eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.	☐wahr $\surd$falsch
Eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$ kann auf $(-r, r)$ beliebig oft abgeleitet werden.	$\surd$wahr ☐falsch
Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv und differenzierbar und gilt $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann ist f^{-1} differenzierbar auf $\mathbb{R}$.	$\surd$wahr ☐falsch

Aufgabe 2. (6 Punkte) Sei $(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Zur Erinnerung: $(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ heißt

- nach oben beschränkt wenn folgendes gilt:

$$\exists T \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N} :\ a_n \leq T;$$

- nach unten beschränkt wenn folgendes gilt:

$$\exists \tilde{T} \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N} :\ \tilde{T} \leq a_n.$$

Zeigen Sie: Ist $(a_n)_{n\geq 1}$ nach oben beschränkt, so ist $(-a_n)_{n\geq 1}$ nach unten beschränkt.

Aufgabe 3. (6 Punkte)

a) Sei $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine Folge. Definieren Sie: $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gegen den Grenzwert $M \in \mathbb{R}$ (d.h. $\lim_{n\to\infty} a_n = M$).

b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$. Definieren Sie: f besitzt einen Grenzwert $M \in \mathbb{R}$ in x_0 (d.h. $\lim_{x\to x_0} f(x) = M$).

Aufgabe 4. (6 Punkte) Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge mit $a_n > 0$. Zeigen Sie:
Wenn $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann konvergiert auch $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ für $x \in [0, 1]$.

Aufgabe 5. (6 Punkte) Berechnen Sie den Grenzwert

a) der Folge $a_n = \sqrt[3]{\dfrac{\pi 2^n}{2^n + 1234}}$, d.h. $\lim_{n\to\infty} a_n$;

b) der Funktion $f(x) = \dfrac{5^x - 3^x}{x}$ in 0, d.h. $\lim_{x\to 0} f(x)$.
Erinnerung: $a^x = e^{\ln(a)\, x}$ für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$.

Begründen Sie Ihre Rechenschritte.

Aufgabe 6. (6 Punkte) Welche Reihen konvergieren? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{10000\, n^3 + 1}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\, e^n}{n!}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{n^n}$

Aufgabe 7. (6 Punkte) Berechnen Sie die Stammfunktionen von den folgenden Funktionen:

a) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x^2}\, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\frac{1}{x} + e}}{x^2}\, dx$