Vorlesung Analysis für Informatiker **Wintersemester 2017**

Vorlesungsklausur

8. Februar 2018

Name:
Matrikelnummer:
(Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer auf alle extra Blätter, die abgegeben werden.)

Aufgabe 1. Kreuzen Sie richtig an:

Eine nach oben beschränkte monoton wachsende Folge ist konvergent.	$\surd$wahr ☐falsch
Die reellen Zahlen aus dem Bereich $[0, 1]$ sind abzählbar.	☐wahr $\surd$falsch
Eine beliebig oft differenzierbare Funktion kann in eine Potenzreihe entwickelt werden.	☐wahr $\surd$falsch
Der Konvergenzradius wird kleiner, wenn eine Potenzreihe abgeleitet wird.	☐wahr $\surd$falsch
Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf $\mathbb{R}$, so ist die Komposition $f \circ f \circ f$ differenzierbar auf $\mathbb{R}$.	$\surd$wahr ☐falsch

Aufgabe 2. (6 Punkte) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$. Definieren Sie mit Hilfe von Nullfolgen:

a) f besitzt einen Grenzwert $M \in \mathbb{R}$ in x_0.

b) f ist differenzierbar in x_0.

Aufgabe 3. (6 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte und begründen Sie Ihre Rechenschritte.

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{(5x^2+1234\,x+3)(x+1)}{(x^2+1234x+1)(2x+1)}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{(3x)}-1}{x}$

Aufgabe 4. (6 Punkte) Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie mit Hilfe Ihrer Definition von Aufgabe 2 b) dass $f + g$ differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 5. (6 Punkte) Bestimmen Sie eine Formel für $f_n \in \mathbb{R}$ (d.h. eine Rekurrenz in f_n, f_{n-1} und f_{n-2} mit den Startwerten $f_0 \in \mathbb{Q}$ und $f_1 \in \mathbb{Q}$), so dass Folgendes gilt:

$$\left(1 - x + x^2\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\, x^n\right) = 1.$$

Aufgabe 6. Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen und begründen Sie jeweils die Rechenschritte:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{3^n} x^n$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3n^2+2n+1}{n^2+1}\right)^n x^n$ c) $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$

Aufgabe 7. Berechnen Sie die Stammfunktionen von den folgenden Funktionen:

a) $\int \sin(x)^2\, dx$

b) $\int x^4 \sin(x^5)\, dx$