2. Vorlesungsklausur

3. März 2017

Name:
Matrikelnummer:
(Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer auf extra Blätter, die abgegeben werden.)

Aufgabe 1. (5 Punkte)

Die Menge der periodischen Zahlen ist abzählbar.	$\surd$wahr ☐falsch
Jede reelle Zahl kann mit einem Algorithmus berechnet werden.	☐wahr $\surd$falsch
Jede nach oben beschränkte Folge $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ besitzt ein Supremum.	$\surd$wahr ☐falsch
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Wenn f differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist, dann ist auch die Komposition $f \circ f$ auf $\mathbb{R}$ differenzierbar.	$\surd$wahr ☐falsch
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Wenn die Multiplikation f^2 auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, dann ist auch f differenzierbar.	☐wahr $\surd$falsch

Aufgabe 2. (6 Punkte)

a) Sei $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine Folge. Definieren Sie: $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gegen den Grenzwert $M \in \mathbb{R}$ (d.h. $\lim_{n\to\infty} a_n = M$).

b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$. Definieren Sie: f besitzt einen Grenzwert $M \in \mathbb{R}$ in x_0.

Aufgabe 3. (6 Punkte) Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in $\mathbb{R}$ mit $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\frac{f}{g}$ stetig in $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 4. (6 Punkte)

a) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$ für die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \frac{\sqrt{n^7}+n^3+1}{2\sqrt{n^7}+n^2+\sqrt{n}+1}$.

b) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to 1} f(x)$ für die Funktion $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{(x-1)}$.

Begründen Sie Ihre Rechenschritte.

Aufgabe 5. (6 Punkte) Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} x^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5+(-1)^n}\right)^n x^n.$

Aufgabe 6. (6 Punkte) Wann kann eine gegebene Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n\, x^n$ invertiert werden? D.h. wann kann für die gegebene Potenzreihe eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} g_n\, x^n$ konstruiert werden, so dass folgendes gilt:

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\, x^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} g_n\, x^n\Big) = 1.$$

Wenn dies möglich ist, geben Sie eine Formel für die g_n in Abhängigkeit von den f_n an. Hinweis: verwenden Sie das Cauchy-Produkt (die Multiplikationsformel von Potenzreihen).

Aufgabe 7. (6 Punkte) Berechnen Sie Stammfunktionen von den folgenden Funktionen:

a) $\displaystyle\int x^2 \sin(x^3)\, dx$ b) $\displaystyle\int x\, e^x\, dx$ c) $\displaystyle\int (2x+3)\cos(2x)\, dx.$