Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
9. Übungsblatt für den 12. 1. 2015

1. Man invertiere, falls möglich, die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 & 1237 \\ 3 & 7 & 6 & 4 & 3764 \\ 7 & 9 & 2 & 0 & 7920 \\ 8 & 1 & 3 & 5 & 8135 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 2346 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Man verwende statt der sonst üblichen Zeilenoperationen diesmal Spaltenoperationen.

2. *Seltsame Vektorräume.* Es sei $F_2 := (\mathbb{Z}/\sim_2, +, \cdot)$ der Körper der Restklassen modulo 2. Wir bezeichnen $K_{\sim_2}(0)$ mit 0 und $K_{\sim_2}(1)$ mit 1 (der Körper F_2 hat genau zwei Elemente). Es sei A eine Menge. Es sei $\mathcal{P}(A)$ die Menge aller Teilmengen von A. Es sei $* : F_2 \times \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ definiert durch $0 * B = \emptyset$, $1 * B = B$ für alle $B \subseteq A$. Man zeige, daß die Menge $\mathcal{P}(A)$ mit den Verknüpfungen Δ und der oben definierten $*$ ein Vektorraum über F_2 ist.

3. Für den Fall daß die Menge A in Beispiel 2 endlich ist, gebe man eine Basis des Vektorraums $(\mathcal{P}(A), \Delta, *)$ and.

4. a) Zeigen Sie, daß die Menge $\mathbb{R}_{>0}$ der positiven reellen Zahlen mit der Multiplikation und mit der Potenzfunktion

$$\mathrm{pot} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}, (a, b) \mapsto b^a$$

einen Vektorraum über $\mathbb{R}$ bildet.

b) Man gebe eine Basis für diesen seltsamen Vektorraum an.

5. Es seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Vektoren im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ über dem Köerper $\mathbb{R}$. Man gebe eine Basis für den Teilraum $\mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3)$.

6. Es sei K ein Körper. Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Es sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf V, die mit der Addition und mit der Skalarmultiplikation verträglich ist. Man zeige, daß ein Unterraum W existiert, sodaß die gegebene Äquivalenzrelation $\sim$ mit der Äquivalenzrelation $\sim_W$, definiert wie in Satz und Definition 5.32, übereinstimmt.

7. Es seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Vektoren im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ über dem Köerper $\mathbb{R}$. Es sei $W = \mathrm{Span}(v_1)$ der von v_1 erzeugte Vektorraum. Man zeige oder widerlege: es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$, sodaß

$$v_3 + W = \lambda v_2 + W.$$

8. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Welche der Teilmengen von $\mathrm{Mat}_{n\times n}$ ist ein Teilraum des Vektorraums $\mathrm{Mat}_{n\times n}$?

   - die Menge der symmetrischen Matrizen
   - die Menge der invertierbaren Matrizen
   - die Menge der schiefsymmetrischen Matrizen
   - die Menge der orthogonalen Matrizen

Das Team der übungsleiter wünscht

Frohe Weihnachten

und einen Guten Rutsch ins Neue Jahr!