Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
8. Übungsblatt für den 15. 12. 2014

1. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit dem Gaußschen Algorithmus für

   (a)
   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 2 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   (b)
   $$A \text{ wie in (a)}, \ b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   (c)
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

2. Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ hat folgendes Gleichungssystem eine/keine/mehrere Lösungen?
   $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & a \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. Sei
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

   (a) Bestimmen Sie eine Matrix P sodass $P \cdot A$ reduzierte Zeilenstaffelform hat.

   (b) Bestimmen Sie P, Q sodass $P \cdot A \cdot Q$ Normalform hat.

   (Hinweis: Berechnen Sie P, Q als Produkt von Elementarmatrizen).

4. Wir schreiben $L(a_1, \dots, a_m)$ für die Menge aller Linearkombinationen der Vektoren $a_1, \dots, a_m$.

   (a) Ist $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $L(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$?

   (b) Finden Sie einen Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ sodass $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und v linear abhängig sind.

(c) Sind folgende Vektoren linear unabhängig?

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(d) Sind folgende Vektoren linear unabhängig?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

5. Was ist der Rang der Matrizen A aus den Aufgaben 1, 2 und 3?

6. Invertieren Sie folgende Matrizen falls möglich:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 7 & -6 \end{pmatrix}$$

7. Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

   (a) Zeigen Sie, dass
   $$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
   falls $ad - bc \neq 0$.

   (b) Zeigen Sie, dass A nicht invertierbar ist falls $ad - bc = 0$.

8. Zeigen Sie: Jede Menge von 4 Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ ist linear abhängig.