Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
7. Übungsblatt für den 24. 11. 2014

1. Berechnen Sie falls möglich für Matrizen
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}:$$
(a) $A \cdot B$ (b) $A \cdot C + C^T \cdot B$ (c) $B \cdot B^T$ (d) $B^T \cdot B$

2. Zeigen Sie für Matrizen über einem kommutativen Ring R:
   (a) Die Addition von $m \times n$-Matrizen ist assoziativ (Satz 2.1.5 (ii)).
   (b) Die Matrizenmultiplikation ist distributiv bzgl. der Addition (Satz 2.1.14).

3. Beweisen Sie Satz 2.1.9: Für $m, n \in \mathbb{N}$ und einem kommutativen Ring R mit 1 seien $A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(R)$ und $\lambda, \mu \in R$. Dann gilt:
   (a) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$,
   (b) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu B$,
   (c) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$,
   (d) $(-1)A = -A$,
   (e) $0A = 0_{m\times n}$.

4. (Satz 2.1.23 (ii)) Zeigen Sie für alle Matrizen A, B, C, für die folgende Ausdrücke definiert sind:
$$(A(B + C))^T = B^T A^T + C^T A^T$$

5. (a) Geben Sie ein Beispiel für eine orthogonale 2×2-Matrix über $\mathbb{R}$ an, die keine Rotationsmatrix ist.
   (b) Bestimmen Sie alle orthogonalen 2×2-Matrizen.
   Hinweis: Welche Bedingungen müssen die Zeilen von $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ erfüllen, damit A orthogonal ist?

6. Zeigen Sie: Das Produkt orthogonaler Matrizen ist orthogonal.

7. Drehen Sie die Punkte
$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ R = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
mit einer Rotationsmatrix um 60° gegen den Uhrzeigersinn um den Nullpunkt.

8. Betrachten wir die Kurve in $\mathbb{R}^2$, die durch
$$7x^2 + 2\sqrt{3}xy + 5y^2 = 4$$
beschrieben ist. Drehen Sie das Koordinatensystem um $\pi/6$ gegen den Uhrzeigersinn. Wie lautet die Gleichung der Kurve bezüglich der Koordinaten (x', y') im gedrehten System?