Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
6. Übungsblatt für den 17. 11. 2014

1. Gegeben ist das Gruppoid $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ mit Operationstabelle

	a	b	c	d	e	f
a	a	c	c	f	a	f
b	c	b	c	d	b	f
c	c	c	c	f	c	f
d	f	d	f	d	d	f
e	a	b	c	d	e	f
f	f	f	f	f	f	f

   (a) Bestimmen Sie das neutrale Element.

   (b) Für die Elemente von A, die eines haben, bestimmen Sie ein inverses Element.

   (c) Ist A kommutativ?

   (d) Ist A assoziativ?

   (e) Ist A eine (abelsche) Gruppe?

2. Verfahren Sie wie in Beispiel 1. für die Gruppoide

   (a)

	a	b	c	d
a	c	d	a	b
b	d	c	b	a
c	a	b	c	d
d	b	a	d	c

   (b)

	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	3	4	2	0
2	2	4	0	1	3
3	3	2	1	4	0
4	4	0	3	0	1

3. Die Elemente der symmetrischen Gruppe S_2 sind die Bijektionen einer 2-elementigen Menge. Es gibt genau 2 davon. Wir können sie darstellen als
$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Dabei verwenden wir $\{1, 2\}$ als 2-elementige Menge. Die Zuordnung von Argument zu Bild ist zu verstehen als $\text{Zeile}_1 \mapsto \text{Zeile}_2$; z.B. ist das Element $a \in S_2$ in dieser Darstellung die Bijektion
$$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 \end{array}$$
Die Tabelle von S_2 ist

∘	e	a
e	e	a
a	a	e

   (a) Geben Sie in analoger Weise die Gruppe S_3 an. Vergeben Sie Namen (z.B. Buchstaben) an ihre 6 Elemente und schreiben Sie die Gruppentabelle an.

   (b) Zeigen Sie, dass die Gruppe S_3 nicht abelsch ist.

4. Ein Element u eines Monoids $(A, \cdot, e)$ heißt **Einheit**, wenn es invertierbar ist, wenn es also ein $v \in A$ gibt sodaß $u \cdot v = e = v \cdot u$ gilt.

   (a) Zeigen Sie: *Die Menge aller Einheiten eines Monoids A bildet mit der binären Operation von A eine Gruppe, die* **Einheitengruppe** von A.

   (b) Es sei X eine Menge. Die Menge aller Abbildungen $X \longrightarrow X$ ist mit der Komposition von Abbildungen als Operation ein Monoid. Bestimmen Sie die Einheitengruppe dieses Monoids.

5. Es bezeichne f die Abbildung
$$f \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \mapsto (x - y, y - z).$$

   (a) Zeigen Sie, dass f ein Homomorphismus der additiven Gruppe von $\mathbb{R}^3$ in die additiven Gruppe von $\mathbb{R}^2$ ist.

   (b) Bestimmen Sie den Kern, $\ker(f)$ und das Bild, $\operatorname{im}(f)$.

   (c) Geben Sie einen Isomorphismus $\mathbb{R}/\ker(f) \cong \operatorname{im}(f)$ an.

6. Beweisen Sie Satz 1.5.22:

   Seien G und H Gruppen, und φ ein Homomorphismus von G nach H.

   (i) Das neutrale Element n_G von G wird auf das neutrale Element n_H von H abgebildet, also $\varphi(n_G) = n_H$.

   (ii) Für alle $a \in G$ gilt $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$.

7. Ein Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ ist ein formaler Ausdruck $\sum_{k=0}^{m} a_k x^k$. Dabei ist x ein 'Symbol' und die Koeffizienten a_k sind ganze Zahlen. Die Menge aller dieser Polynome bezeichnet man mit $\mathbb{Z}[x]$ (vergleiche Beispiel 1.5.31).

   Polynome können miteinander addiert und multipliziert werden durch

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m} a_k x^k + \sum_{k=0}^{n} b_k x^k &= \sum_{k=0}^{\max(m,n)} (a_k + b_k) x^k \\ \sum_{k=0}^{m} a_k x^k \cdot \sum_{k=0}^{n} b_k x^k &= \sum_{k=0}^{m+n} \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} x^k \end{aligned}$$

   (a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[x]$ mit diesen Rechenoperationen einen kommutativen Ring mit Einselement bildet.

   (b) Beweisen Sie, dass $\mathbb{Z}[x]$ sogar ein Integritätsbereich ist.

8. (a) Schreiben Sie die Additionstabelle der Gruppe $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ auf.

   (b) Konstruieren Sie einen Isomorphismus $f \colon \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6$ indem Sie eine elementweise Zuordnung der beiden Gruppen anschreiben ($x \mapsto f(x)$, 6 Pfeile). Um die Homomorphie-Eigenschaft von f zu erzwingen, können Sie die Tabellen der beiden beteiligten Gruppen vergleichen und die Zuordnungen entsprechend wählen.