Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
5. Übungsblatt für den 10. 11. 2014

1. Seien A, B nichtleere Mengen, $f\colon A \longrightarrow B$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

   (a) f injektiv $\iff$ $\exists g\colon B \longrightarrow A$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$

   (b) f surjektiv $\iff$ $\exists g\colon B \longrightarrow A$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_B$

   Anmerkung: id_A bezeichnet die identisch Abbildung $A \longrightarrow A$, $x \mapsto x$.

2. Konstruieren Sie bijektive Abbildungen zwischen

   (a) $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$;

   (b) $\mathbb{Z}$ und $2\mathbb{Z}$;

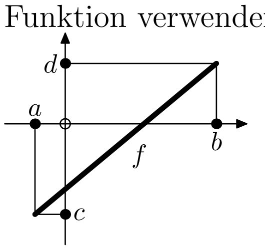
   (c) $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$;

3. Zeigen Sie, dass die Menge der Primzahlen 'ebenso viele Elemente' hat, wie die Menge aller natürlichen Zahlen.

4. Es seien a, b, c, d reelle Zahlen mit $a < b$ und $c < d$. Zeigen Sie, dass die abgeschlossenen Intervalle $[a, b]$ und $[c, d]$ gleichmächtig sind.

   Anleitung:

   Geben Sie eine bijektive Abbildung $f\colon [a, b] \longrightarrow [c, d]$ an. Es gibt große Auswahl; Sie können z.B. eine (affin) lineare Funktion verwenden.

5. Zeigen Sie, dass je zwei nichtleere offene Intervalle in $\mathbb{R}$ gleichmächtig sind.

6. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Zeigen Sie, dass $|(a, b)| = |\mathbb{R}|$.

7. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Zeigen Sie:

   $$|(a, b)| = |[a, b)| = |[a, b]| = |(a, b]|.$$

   Anleitung:

Schröder-Bernstein (Satz 1.3.57).

8. Beweisen Sie, dass die Menge aller reellen Zahlen und die Menge der reellen Zahlen größer gleich Null 'gleich viele Elemente' haben; also, dass
$$|\mathbb{R}| = |\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}|.$$