Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
4. Übungsblatt für den 3. 11. 2014

1. Welche der Eigenschaften (refelxiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv, funktional) treffen auf die folgenden Relationen zu?
   - R ist eine Relation auf $\mathbb{Z}$: $aRb :\Longleftrightarrow |a| = |b|$
   - R ist eine Relation auf $\{a, b, c\}$: $R = \{(a, a), (a, c), (c, a)\}$
   - R ist eine Relation auf $\{1, 2, 3\}$: $R = \{(1, 1), (2, 3), (2, 2), (1, 2), (3, 3), (1, 3)\}$

2. (a) Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen und ein Repräsentantensystem der folgenden Äquivalenzrelationen auf der Menge $\mathbb{Z}$.
      i. $a \sim b :\Longleftrightarrow 3 \mid a - b$
      ii. $a \sim b :\Longleftrightarrow \sin(a\frac{\pi}{2}) = \sin(b\frac{\pi}{2})$

   (b) Finden Sie die größten, kleinsten, maximalen und minimalen Elemente (falls vorhanden) der folgenden Ordnungsrelationen.
      i. $\langle \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) \setminus \{\emptyset\}, \subseteq\rangle$
      ii. $\langle\{n \in \mathbb{N} \,|\, n \mid 60 \wedge \exists m_1, m_2 \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : n = m_1m_2 \wedge m_1 \neq m_2\}, \mid\rangle$

3. Beweisen Sie Satz 1.3.21. Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge A. Dann gilt für alle $a, b \in A$:
   (a) $K_\sim(a) = K_\sim(b) \iff a \sim b$
   (b) $a \not\sim b \iff K_\sim(a) \cap K_\sim(b) = \emptyset$
   (c) $\bigcup_{a\in A} K_\sim(a) = A$

4. Beweisen Sie Satz 1.3.22.
   (a) Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge A. Dann bilden die verschiedenen Äquivalenzklassen eine Partition von A.
   (b) Sei $A = \cup_{i\in I} A_i$ eine Partition der Menge A. Dann ist die Relation $\sim$ mit

   $$a \sim b :\Longleftrightarrow \exists i \in I : a \in A_i \wedge b \in A_i$$

   eine Äquivalenzrelation.

5. Welche der Eigenschaften (injektiv, surjektiv, bijektiv, idempotent) treffen auf die folgenden Funktionen zu? Eine Funktion f heißt idempotent, wenn $f \circ f = f$.

   $$f_1 : [-1, 1] \to [-1, 1], \quad f_2 : [-1, 1] \to [0, 1], \quad f_3 : [-1, 1] \to [-1, 2]$$
   $$x \mapsto x \qquad\qquad x \mapsto x^2 \qquad\qquad x \mapsto x^3$$

6. Finden Sie jeweils Funktionen f und g mit den folgenden Eigenschaften.
   (a) $f \neq \mathrm{id}$ und $f \circ f = \mathrm{id}$
   (b) $f \circ g \neq g \circ f$

7. Beweisen Sie Satz 1.3.40. Seien $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ und $h : C \longrightarrow D$ Funktionen.

   (a) Es gilt $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

   (b) Sind die Funktionen f und g injektiv bzw. surjektiv, so gilt das auch für $g \circ f$.

   (c) Zu f gibt es höchstens eine inverse Funktion.

   (d) f besitzt genau dann eine inverse Funktion f^{-1}, wenn f bijektiv ist.

8. Beweisen Sie Satz 1.3.41. Sei $f : A \longrightarrow B$ eine Funktion.

   (a) f ist injektiv genau dann, wenn für alle Funktionen $g, h : C \longrightarrow A$ gilt:

   $$f \circ g = f \circ h \implies g = h$$

   (b) f ist surjektiv genau dann, wenn für alle Funktionen $g, h : B \longrightarrow C$ gilt:

   $$g \circ f = h \circ f \implies g = h$$