Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
3. Übungsblatt für den 27. 10. 2014

1. Seien U, A, B und C wie folgt definiert.

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \qquad A = \{1, 2, 4, 5\}$$
$$B = \{1, 2, 3, 6\} \qquad C = \{1, 3, 4, 7\}$$

   Geben Sie explizit die Elemente der folgenden Mengen an.

$$E_1 = A \cap B \qquad E_2 = C \cup B \qquad E_3 = A \triangle C$$
$$E_4 = A \triangle B \triangle C \qquad E_5 = \overline{A \cap B \cap C} \qquad E_6 = U \cap (A \cup \overline{B})$$

$$E_7 = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C) \qquad E_8 = (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) \cap \overline{U}$$
$$E_9 = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) \quad E_{10} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$$

2. Geben Sie die Elemente der geschachtelten Mengen explizit an.

$$\begin{aligned} E_1 = {} & (\{a \in \mathbb{N} \mid a < 3\} \cup \{\{3, 4\}, 5\}) \setminus (\{\{4\}\} \cup \{a \in \mathbb{N} \mid a \geq 5\} \cup \{1\}) \\ & \cup \{5, \{5\}\} \cup (\{a \in \mathbb{N} \mid a > 2\} \cap \{a \in \mathbb{Q} \mid -a \geq 1\}) \\ E_2 = {} & (\{a \in \mathbb{N} \mid a < 2\} \times \{3, 4\} \times \{\{5, 6\}\}) \setminus (\{1\} \times \{3, 5\} \times \{\{5, 6\}, 5\}) \\ & \cup (\{\{2\}0\} \times \{3\} \times \{\{\{5\}, 5\}, \{5, 6\}\}) \end{aligned}$$

3. Beschreiben Sie die Menge A jeweils durch eine Eigenschaft, also in der Form $A = \{x \in M \mid P(x)\}$.
   (a) $\{5, 8, 6, 9, 7, 4, 10\}$
   (b) $\{0, 1, 4, 9, 16, 25\}$
   (c) $\{1, -2, 3, -4, 5, -6\}$
   (d) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right\}$
   (e) $([0, 2] \times [0, 2]) \cap ([-1, 1] \times [-1, 1])$

4. Zeigen Sie Satz 1.3.6 für beliebige Mengen A und B.
   (a) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$
   (b) $A \setminus B \subseteq A$
   (c) $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

5. Zeigen Sie, dass für beliebige Mengen A, B und C die Distributivgesetze gelten.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

6. Zeigen Sie die Gesetze von De Morgan für Familien von Mengen.
   - $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$

- $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$

7. Widerlegen Sie die folgenden Gleichungen jeweils mittels eines Gegenbeispiels. Das heißt, finden Sie Mengen A, B und C, sodass die beiden Seiten der Gleichung unterschiedliche Ergebnisse liefern. Kann man das Gleichheitszeichen durch $\subseteq$ oder $\supseteq$ ersetzen um eine wahre Aussage für alle Mengen A, B und C zu erhalten?

   (a) $A \setminus (\overline{B} \cup C) = (A \cup B) \setminus C$

   (b) $A \cup (A \cap B) = B \cap (A \cup B)$

   (c) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$

8. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich.

   (a) $((B \cup A) \cup (B \cap C)) \cap ((A \cup (B \cup (B \cap C))) \cap (C \cup (D \cup ((C \cup D) \cap B))))$

   (b) $\Big(((\overline{\overline{B} \cup \overline{A}}) \setminus (C \cap A)) \cup ((\overline{\overline{A}} \cap C) \setminus (A \cap B))\Big) \cap \Big(\overline{A} \cup \overline{(B \cup C) \setminus (B \cap C)}\Big)$