Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
2. Übungsblatt für den 20. 10. 2014

1. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \Sigma_{k=1}^{n} k^3 = \left(\Sigma_{k=1}^{n} k\right)^2.$$

2. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \Sigma_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2.$$

3. Beweisen Sie Satz 1.2.6: Sind $k, m, n \in \mathbb{Z}$, dann gilt
   (a) $k \mid m \land k \mid n \implies k \mid m+n \land k \mid m-n$,
   (b) $k \mid m \implies k \mid mn$,
   (c) $k \mid m \land m \mid k \implies k = \pm m$,
   (d) $k \mid m \land m \mid n \implies k \mid n$.

4. Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$.
   (a) Seien weiters $x, y \in \mathbb{Z}$, sodass
   $$ax + by = c.$$
   Zeigen Sie, dass dann $\mathrm{ggT}(a, b) \mid c$.
   (b) Es gelte $\mathrm{ggT}(a, b) \mid c$. Zeigen Sie, dass es dann $x, y \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass
   $$ax + by = c.$$
   Hinweis: Erweiterter Euklidscher Divisionsalgorithmus.

5. Bestimmen Sie eine ganzzahlige Lösung jeder der folgenden Gleichungen.
   (a) $-1104x + 1081y = 622$.
   (b) $1701x + 4418y = 308$.

6. Zeigen Sie:

$$\forall b \in \mathbb{N}\, \forall a \in \mathbb{N}\, \exists d \in \mathbb{N} : d \mid a \land d \mid b \land \forall c \in \mathbb{N} : \big(c \mid a \land c \mid b \implies c \mid d\big).$$

Hinweis: Verwenden Sie Induktion (in der äquivalenten Variante, vgl. die Formel vor Beispiel 1.2.4) nach b. D.h.: es sei $b \in \mathbb{N}$, beliebig, aber fix, und wir zeigen:

$$\forall a \in \mathbb{N}\, \exists d \in \mathbb{N} : d \mid a \land d \mid b \land \forall c \in \mathbb{N} : \big(c \mid a \land c \mid b \implies c \mid d\big).$$

Dabei dürfen wir als Induktionshypothese annehmen:

$$\forall b' < b : \forall a \in \mathbb{N}\, \exists d \in \mathbb{N} : d \mid a \land d \mid b' \land \forall c \in \mathbb{N} : \big(c \mid a \land c \mid b' \implies c \mid d\big). \tag{IH}$$

Sei $a \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fix. Wir müssen zeigen:

$$\exists d \in \mathbb{N} : d \mid a \land d \mid b \land \forall c \in \mathbb{N} : \big(c \mid a \land c \mid b \implies c \mid d\big). \tag{G}$$

Unterscheiden Sie dann die beiden Fälle $b = 0$ und $b > 0$. Im zweiten Fall gehen Sie wie im Euklidischen Algorithmus vor, d.h. dividieren Sie a durch b und wenden Sie die (IH) auf den Rest (für b') und b (für a) an.

7. Beweisen Sie direkt aus der Definition der rationalen Zahlen (laut Skriptum) und gängigen Eigenschaften der ganzen Zahlen, dass die Gleichheit rationaler Zahlen *transitiv* ist, d.h., dass für alle rationalen Zahlen a, b, c gilt: Wenn $a = b$ und $b = c$, dann ist auch $a = c$.

   Hinweis: Sie dürfen die entsprechende Eigenschaft für ganze Zahlen verwenden, nicht aber für rationale Zahlen. Verwenden Sie die in der Vorlesung bei der Definition der rationalen Zahlen eingeführte Definiton der Gleichheit rationaler Zahlen, die diese auf eine Beziehung zwischen deren Zähler und Nenner, also eine Gleichheit ganzer Zahlen zurückführt.

8. Beweisen Sie direkt aus der Definition der rationalen Zahlen (laut Skriptum) und gängigen Eigenschaften der ganzen Zahlen, dass die Addition rationaler Zahlen *wohldefiniert* ist, d.h., dass für alle rationalen Zahlen a, b, c, d gilt: Wenn $a = c$ und $b = d$, dann ist auch $a + b = c + d$. *Hinweis:* Der Hinweis zum vorigen Beispiel gilt auch hier.