Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
10. Übungsblatt für den 26. 1. 2015

1. Es sei
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x - y, x + y, y).$$
Man bestimme eine Abbildung $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, sodass $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ ist.

2. Es seien V, W Vektorraäume über einem Körper K. Man zeige, dass für jede injektive lineare Abbildung $f : V \to W$ eine linksseitige Inverse existiert, d.h. eine lineare Abbildung $g : W \to V$, sodass $g \circ f = \mathrm{id}_V$ ist.
Hinweis: Man wende Satz 5.37 auf den Bildraum von f an.

3. Es sei
$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x + y + z, x + y).$$
Man bestimme eine Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, sodass $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ ist.

4. Es seien V, W Vektorräume über einem Körper K. Man zeige, dass für jede surjektive lineare Abbildung $f : V \to W$ eine rechtsseitige Inverse existiert, d.h. eine lineare Abbildung $g : W \to V$, sodass $f \circ g = \mathrm{id}_W$ ist.
Hinweis: Man wende Satz 5.37 auf den Nullraum von f an.

5. Es seien
$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x + y + z, x + y),$$
$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x + y, x + y - z).$$
Man bestimme eine lineare Abbildung $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, sodass $g = h \circ f$ ist.

6. Für die folgende Übung darf folgendes Lemma ohne Beweis verwendet werden.

   Lemma. Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Es seien $W_1, W_2 \subset V$ zwei Unterräume, sodass $W_1 \subset W_2$ gilt. Dann existiert eine lineare Abbildung $a : V/W_1 \to V/W_2$, die für jedes $v \in V$ die Klasse $K_{\sim_{W_1}}(v)$ der Klasse $K_{\sim_{W_2}}(v)$ zuordnet.

   (Der Beweis dieses Lemmas ist nicht schwer, es soll aber den Teilnehmern und Teilnehmerinnen nicht zugemutet werden, einen Beweis aufzuschreiben.)

   Nun zur eigentlichen Übung. Es seien V_1, V_2, V_3 Vektorräume über einem Körper K. Es sei $f : V_1 \to V_2$ eine surjektive lineare Abbildung. Es sei $g : V_1 \to V_3$ eine lineare Abbildung. Es gelte $\mathrm{kern}(f) \subseteq \mathrm{kern}(g)$. Man zeige, dass eine lineare Abbildung $h : V_2 \to V_3$ existiert, sodass $g = h \circ f$ ist.
Hinweis: Man wende Satz 6.11 und das obige Lemma.

7. Es sei $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}$ die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Man bestimme den Kern der linearen Abbildung
$$f : \mathrm{Mat}_{2\times 2} \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}, X \mapsto A \cdot X.$$

8. Man bestimme das Bild der linearen Abbildung von Beispiel 7.