Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
1. Übungsblatt für den 13. 10. 2014

In der Vorlesung wurden die Definitionen für die wichtigsten Rechenoperationen erwähnt. Für die bessere Referenz geben wir ihnen passende Namen:

A0 $\forall n \in \mathbb{N} : n + 0 = n$.

AS $\forall n, m \in \mathbb{N} : n + S(m) = S(n + m)$.

M0 $\forall n \in \mathbb{N} : n \cdot 0 = 0$.

MS $\forall n, m \in \mathbb{N} : n \cdot S(m) = n \cdot m + n$.

P0 $\forall n \in \mathbb{N} : n^0 = S(0)$.

PS $\forall n, m \in \mathbb{N} : n^{S(m)} = n^m \cdot n$.

Weiters wurden die folgenden Sätze mit vollständiger Induktion bewiesen:

0A $\forall n \in \mathbb{N} : 0 + n = n$.

SA $\forall m, n \in \mathbb{N} : S(n) + m = S(n + m)$.

AC $\forall n, m \in \mathbb{N} : m + n = n + m$.

Zum Lösen der folgenden Übungsaufgaben dürfen Sie außer diesen Aussagen und den jeweils vorangehenden Beispielen (und den Peano-Axiomen, insbesondere dem Induktionsprinzip) kein weiteres Wissen über die natürlichen Zahlen verwenden. Begründen Sie dabei in jedem Schritt, welche bereits bekannte Tatsache verwendet wird, und auch, welche Ausdrücke jeweils für die Variablen der Allquantoren einzusetzen sind, ungefähr so, wie in diesem Beweis von [AC]:

Sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fix gewählt.

Zu zeigen: $\forall n \in \mathbb{N} : m + n = n + m$.

Wir zeigen diese Aussage mit vollstänger Induktion (nach n):

Induktionsbasis: Zu zeigen: $m + 0 = 0 + m$.

Es gelten:

$$\begin{aligned} m + 0 &= m && \text{[A0] mit } n := m; \\ 0 + m &= m && \text{[0A] mit } n := m. \end{aligned}$$

Also sind beide Seiten identisch. Die Induktionsbasis somit gezeigt.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ (beliebig, aber fix gewählt), sodass

Induktionshypothese: $m + n = n + m$.

Induktionsschritt: Zu zeigen: $m + S(n) = S(n) + m$.

Es gelten:

$$\begin{aligned} m + S(n) &= S(m + n) && \text{[AS], mit } n := m,\ m := n; \\ S(n) + m &= S(n + m) && \text{[SA]} \\ &= S(m + n) && \text{[Induktionshypothese].} \end{aligned}$$

Damit sind auch hier beide Seiten identisch. Also ist auch der Induktionsschritt gezeigt.

Der Induktionbeweis ist damit abgeschlossen.

Anmerkung: Die Notation, wie z.B. $n := 0$, steht hier als Abkürzung für: “Um die benötigte Gleichheit herzuleiten, setzen wir für die Variable n in der zitierten Allaussage den aktuellen Wert 0 ein”.

1. Zeigen Sie das Assoziativgesetz für die Addition natürlicher Zahlen:

   AA $\forall a, b, c \in \mathbb{N} : (a + b) + c = a + (b + c)$.

   Hinweis: Beginnen Sie den Beweis so: Seien $a, b \in \mathbb{N}$ beliebig aber fix. Wir haben zu zeigen:
   $$\forall c \in \mathbb{N} : (a + b) + c = a + (b + c).$$
   Zeigen Sie dann diese Aussage mit vollständiger Induktion (nach c), gemäß [P5].

2. Zeigen Sie die zur Definition dualen Eigenschaften der Multiplikation natürlicher Zahlen:

   0M $\forall m \in \mathbb{N} : 0 \cdot m = 0$;

   SM $\forall n, m \in \mathbb{N} : S(n) \cdot m = n \cdot m + m$.

3. Zeigen Sie das Kommutativgesetz für die Multiplikation natürlicher Zahlen:

   MC $\forall n, m \in \mathbb{N} : m \cdot n = n \cdot m$.

4. Zeigen Sie die Distributivgesetze:

   DR: $\forall a, b, n \in \mathbb{N} : (a + b) \cdot n = a \cdot n + b \cdot n$.

   DL: $\forall a, b, n \in \mathbb{N} : n \cdot (a + b) = n \cdot a + n \cdot b$.

5. Zeigen Sie das Assoziativgesetz für die Multiplikation natürlicher Zahlen:

   MA $\forall a, b, c \in \mathbb{N} : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

6. Zeigen Sie das Gesetz für Produkte von Potenzen:

   PM $\forall a, n, m \in \mathbb{N} : a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

7. Zeigen Sie das Gesetz für Potenzen von Potenzen:

   PP $\forall a, n, m \in \mathbb{N} : (a^n)^m = a^{n \cdot m}$.

8. Zeigen Sie das Gesetz für die Potenz eines Produktes:

   MP $\forall a, b, n \in \mathbb{N} : (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.