Satz 3.23: *Jede Matrix kann mittels elementarer Zeilenoperationen in eine eindeutig bestimmte Hermite-Matrix transformiert werden.*
Zwei Matrizen A und B sind also zeilenäquivalent g.d.w. sie dieselbe zugehörige Hermite-Matrix haben.

Beweis: Es genügt zu zeigen:

"Sind A, B zwei zeilenäquivalente ($A \sim B$) Hermite-Matrizen, dann $A = B$"

Seien also $A \sim B$ zwei Hermite-Matrizen der Dimension $m \times n$.
Die Nullmatrix ist nur zu sich selbst zeilenäquivalent. Ist also A oder B die Nullmatrix, dann gilt $A = B$.

Für den Fall "$A, B \neq 0$" verfahren wir mittels Induktion über n:
$n = 1$: in diesem Fall gibt es nur eine Hermite-Matrix, nämlich

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = B \ .$$

Induktionsannahme: "*Sind $A \sim B$ Hermite-Matrizen der Dimension $m \times (n-1)$, so sind $A = B$*"

Induktionsschritt $n - 1 \to n$: Seien nun $A \sim B$ Hermite-Matrizen der Dimension $m \times n$, also

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, \quad B = (b_{ij})_{m \times n} \ .$$

Für ein Produkt von Elementarmatrizen F gilt also

$$B = F \cdot A \ .$$

Seien $\hat{A}, \hat{B}$ die Matrizen, welche aus den ersten $n - 1$ Spalten von A bzw. B bestehen,

$$\hat{A} = (a_{ij})_{m \times (n-1)}, \quad \hat{B} = (b_{ij})_{m \times (n-1)} \ .$$

$\hat{A} \sim \hat{B}$ sind Hermite-Matrizen mit $n-1$ Spalten, also wegen der Induktionshypothese gilt

$$\hat{A} = \hat{B} \ .$$

Es bleibt also zu zeigen, dass auch die n-ten Spalten von A und B übereinstimmen.
Der Zeilenrang einer Hermite-Matrix ist offenbar die Anzahl der von 0 verschiedenen Zeilen. Wegen $A \sim B$ ist $\operatorname{rang}_z(A) = \operatorname{rang}_z(B)$ (Satz 3.22), also A und B haben dieselbe Anzahl von Staffelelementen, etwa

$$\operatorname{rang}_z(A) = r = \operatorname{rang}_z(B) \ .$$

Dann ist

$$\operatorname{rang}_z(\hat{A}) = \operatorname{rang}_z(\hat{B}) = \begin{cases} r - 1 & \qquad (1) \\ & \text{oder} \\ r & \qquad (2) \ . \end{cases}$$

Im Fall (1) gibt es in den letzten Spalten von A und B nur eine 1,

$$\begin{pmatrix} a_{in} \\ \vdots \\ a_{rn} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{in} \\ \vdots \\ b_{rn} \\ \vdots \\ b_{mn} \end{pmatrix} \quad , \quad \text{also} \quad A = B \ .$$

Im Fall (2): wegen $B = FA$ lässt sich jede Zeile von B schreiben als Linearkombination von Zeilen von A:

$$(b_{i1} \dots b_{in}) \;=\; \sum_{k=1}^{r} \lambda_k (a_{k1} \dots a_{kn}) \quad \text{für} \;\; 1 \le i \le r \ .$$

Also gilt das auch für die Zeilen von $\hat{A} = \hat{B}$:

$$(a_{i1} \dots a_{i\,n-1}) = (b_{i1} \dots b_{i\,n-1}) \;=\; \sum_{k=1}^{r} \lambda_k (a_{k1} \dots a_{k\,n-1}) \quad \text{für} \;\; 1 \le i \le r \ .$$

Die ersten r Zeilen von $\hat{A}$ sind aber linear unabhängig, also

$$\lambda_i = 1 \quad \text{und} \quad \lambda_j = 0 \text{ für } j \ne i \ .$$

Somit ist $(b_{i1} \dots b_{in}) = (a_{i1} \dots a_{in})$, insbesondere $a_{in} = b_{in}$ für alle $1 \le i \le m$, also $A = B$.
□