Name: ....

Matr.Nr.: ....

Stud.Kennz.: ....

Klausur
"Lineare Algebra und Analytische Geometrie I" (326036)
28.3.2015

Bitte folgendes beachten:

- *Schriftliche Unterlagen sowie elektronische Geräte dürfen NICHT zur Klausur verwendet werden.*
- *Tragen Sie – noch bevor Sie zu arbeiten beginnen — auf dem Angabenblatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Studienkennzahl ein. Schreiben Sie auf jedes Blatt, das Sie verwenden, links oben Ihren Namen.*
- *Geben Sie das ausgefüllte Angabenblatt zusammen mit Ihren Lösungen ab. Sie finden das Angabenblatt demnächst im Netz.*
- *Verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt (oder mehrere), und geben Sie Ihre Lösungen nach Aufgabennummern geordnet ab, also beginnend mit der ersten Aufgabe.*

Alle Lösungen sind zu begründen !

(1) Sei R eine Relation auf der Menge A. Für $(a,b) \in R$ schreiben wir auch aRb. Was bedeuten die folgenden Begriffe (geben Sie Definitionen an) ?
(a) R ist reflexiv;
(b) R ist symmetrisch;
(c) R ist antisymmetrisch;
(d) R ist transitiv;
(e) R ist eine Äquivalenzrelation.

(2) Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir in $\mathbb{N}^3$ die Mengen

$$S_n = \{(u,v,w) \mid u+v+w = n\} \ , \quad T_n = \{(u,v,w) \mid u+v+w \leq n\} \ .$$

Zeigen Sie (eventuell durch Induktion über n):

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ |S_n| \ = \ \frac{1}{2} \cdot (n+1)(n+2) \ .$$

Hinweis: S_{n+1} erhält man etwa aus S_n, indem man in der ersten Komponente 1 addiert, und dann noch die Elemente der Form $(0,v,w)$ mit $v+w=1$ dazugibt.

$\Big[$ Zusatzbeispiel: Zeigen Sie: $\forall n \in \mathbb{N} : \ |T_n| \ = \ \binom{n+3}{n} \ .\Big]$

(3) Sei A die folgende Matrix über $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die Hermite-Matrix H_A zur Matrix A, sowie den Rang von A.
(b) Bestimmen Sie den Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$.
(c) Für $b_1 = (2,1,2)^T, b_2 = (1,1,1)^T$ bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge des inhomogenen Gleichungssystems $A \cdot x = b_i$.

(4) (a) Konstruieren Sie eine 3×3–Matrix A über $\mathbb{R}$, sodass das Gleichungssystem

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

den von $(1,1,0)^T$ und $(1,0,1)^T$ aufgespannten Raum als Lösungsraum hat.
(b) Sei A eine $n \times n$–Matrix über $\mathbb{R}$, und sei $L_A \subseteq \mathbb{R}_n$ der Lösungsraum des Gleichungssystems

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Wie hängen n, $\dim(L_A)$ und $\mathrm{rang}(A)$ zusammen?

(5) Für $a \in \mathbb{R}$ sei A_a die Matrix

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ a & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Für welche Werte von a hat das Gleichungssystem

$$A_a \cdot x = 0$$

mehr als nur eine Lösung? Berechnen Sie für einen dieser Werte von a die Lösungsmenge von $A_a \cdot x = 0$.

[Zusatzbsp: Bestimmen Sie die Determinante von A_a in Abhängigkeit von a.]

(6) Seien V und W endlichdimensionale Vektorräume über K. Sei B eine Basis von V und sei C eine Basis von W. Weiters sei $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung von V nach W.
Zeigen Sie:
(a) f ist injektiv gdw $f(B)$ ist linear unabhängig in W.
(b) f ist surjektiv gdw $C \subseteq f(V)$.