Name: ....

Matr.Nr.: ....

Stud.Kennz.: ....

Klausur
"Lineare Algebra und Analytische Geometrie I" (326036)
31.1.2015

Bitte beachten Sie folgendes:

- Schriftliche Unterlagen sowie elektronische Geräte dürfen NICHT zur Klausur verwendet werden.
- Tragen Sie – noch bevor Sie zu arbeiten beginnen — auf dem Angabenblatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Studienkennzahl ein. Schreiben Sie auf jedes Blatt, das Sie verwenden, links oben Ihren Namen.
- Geben Sie das ausgefüllte Angabenblatt zusammen mit Ihren Lösungen ab. Sie finden das Angabenblatt demnächst auf der Webseite der Vorlesung.
- Verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt (oder mehrere), und geben Sie Ihre Lösungen nach Aufgabennummern geordnet ab, also beginnend mit der ersten Aufgabe.

Alle Antworten sind zu begründen !

Aufgabe 1:

(a) Geben Sie die Peano Axiome (P1) – (P5) für die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ an.

(b) Die Addition auf $\mathbb{N}$ ist definiert als:

$$\begin{aligned} n+0 &:= n \quad \text{und} \\ n+S(m) &:= S(n+m)\ , \quad (\text{also } n+(m+1) := (n+m)+1). \end{aligned}$$

Beweisen Sie nur mittels der Peano Axiome: $\forall m \in \mathbb{N} : 0+m = m$.

Aufgabe 2:

Geben Sie eine injektive Funktion $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ an. Begründen Sie die Injektivität mittels der in der Vorlesung besprochenen Eigenschaften ganzer Zahlen.
Folgt daraus, dass $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ gleichmächtig sind?

Aufgabe 3:

(a) Wie sieht die Rotationsmatrix der Rotation r aus, welche den Punkt $P = (1,0)$ in den Punkt $Q = (\sqrt{3}/2, 1/2)$ transformiert, also für welche gilt $r(P) = Q$?

(b) Bestimmen Sie $r(1/2, \sqrt{3}/2)$.

(c) Ist die Rotation um einen Winkel α eine lineare Funktion auf $\mathbb{R}^2$?

Aufgabe 4:

Betrachten Sie das folgende System linearer Gleichungen über $\mathbb{R}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b} .$$

(a) Bestimmen Sie eine Lösung des Gleichungssystems.

(b) Was ist die Dimension des Lösungsraumes dieses Gleichungssystems?

(c) Wieviele linear unabhängige Zeilen hat die Koeffizientenmatrix A?
Wieviele linear unabhängige Zeilen hat die erweiterte Matrix $(A|b)$?

Aufgabe 5:

Seien $P, Q, R \in \mathbb{R}_3$ wie folgt:

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie $\dim(\operatorname{span}(P, Q, R))$.

(b) Bestimmen Sie ein homogenes SLG, welches genau den von P, Q, R in $\mathbb{R}_3$ aufgespannten Raum als Lösungsraum besitzt.

Aufgabe 6:

Seien V und W Vektorräume der endlichen Dimensionen m und n über dem Körper K. Sei B eine Basis für V und C eine Basis für W.

(a) Seien f und g in $\mathrm{Hom}_K(V, W)$.
Zeigen Sie: $\mathcal{A}(f + g, B, C) = \mathcal{A}(f, B, C) + \mathcal{A}(g, B, C)$.

(b) Sei

$$M := \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

die Darstellungsmatrix einer linearen Funktion $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ bzgl. der kanonischen Basis B; also $M = \mathcal{A}(f, B, B)$.
Ist f bijektiv?
Wenn ja, wie sieht f^{-1} aus?