

Name:

Matr.Nr.:

Stud.Kennz.:

Klausur
“Lineare Algebra und Analytische Geometrie I” (326036)
31.1.2015

Bitte beachten Sie folgendes:

- Schriftliche Unterlagen sowie elektronische Geräte dürfen NICHT zur Klausur verwendet werden.
- Tragen Sie – noch bevor Sie zu arbeiten beginnen — auf dem Angabenblatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Studienkennzahl ein. Schreiben Sie auf jedes Blatt, das Sie verwenden, links oben Ihren Namen.
- Geben Sie das ausgefüllte Angabenblatt zusammen mit Ihren Lösungen ab. Sie finden das Angabenblatt demnächst auf der Webseite der Vorlesung.
- Verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt (oder mehrere), und geben Sie Ihre Lösungen nach Aufgabennummern geordnet ab, also beginnend mit der ersten Aufgabe.

Alle Antworten sind zu begründen !

Aufgabe 1:

- (a) Geben Sie die Peano Axiome (P1) – (P5) für die natürlichen Zahlen \mathbb{N} an.
- (b) Die Addition auf \mathbb{N} ist definiert als:

$$n + 0 := n \quad \text{und} \\ n + S(m) := S(n + m), \quad (\text{also } n + (m + 1) := (n + m) + 1).$$

Beweisen Sie nur mittels der Peano Axiome: $\forall m \in \mathbb{N} : 0 + m = m$.**Aufgabe 2:**

Geben Sie eine injektive Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ an. Begründen Sie die Injektivität mittels der in der Vorlesung besprochenen Eigenschaften natürlicher Zahlen. Folgt daraus, dass \mathbb{N} und \mathbb{N}^2 gleichmächtig sind?

Aufgabe 3:

- (a) Wie sieht die Rotationsmatrix der Rotation r aus, welche den Punkt $P = (1, 0)$ in den Punkt $Q = (1/2, \sqrt{3}/2)$ transformiert, also für welche gilt $r(P) = Q$?
- (b) Bestimmen Sie $r(\sqrt{3}, 3)$.
- (c) Ist die Rotation um einen Winkel α eine lineare Funktion auf \mathbb{R}^2 ?

Aufgabe 4:

Betrachten Sie das folgende System linearer Gleichungen über \mathbb{R} :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}}_b .$$

- (a) Bestimmen Sie eine Lösung des Gleichungssystems.
- (b) Was ist die Dimension des Lösungsraumes dieses Gleichungssystems?
- (c) Wieviele linear unabhängige Zeilen hat die Koeffizientenmatrix A ?
Wieviele linear unabhängige Zeilen hat die erweiterte Matrix $(A|b)$?

Aufgabe 5:

Seien $P, Q, R \in \mathbb{R}_3$ wie folgt:

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

- (a) Bestimmen Sie $\dim(\text{span}(P, Q, R))$.
- (b) Bestimmen Sie ein homogenes SLG, welches genau den von P, Q, R in \mathbb{R}_3 aufgespannten Raum als Lösungsraum besitzt.

Aufgabe 6:

Seien V und W Vektorräume der endlichen Dimensionen m und n über dem Körper K . Sei B eine Basis für V und C eine Basis für W .

- (a) Seien f und g in $\text{Hom}_K(V, W)$.
Zeigen Sie: $\mathcal{A}(f + g, B, C) = \mathcal{A}(f, B, C) + \mathcal{A}(g, B, C)$.
- (b) Sei

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

die Darstellungsmatrix einer linearen Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ bzgl. der kanonischen Basis B ; also $M = \mathcal{A}(f, B, B)$.

Ist f bijektiv?

Wenn ja, wie sieht f^{-1} aus?