7 Determinanten

Im folgenden betrachten wir quadratische Matrizen. Wir schreiben dabei eine $n \times n$ Matrix A (über dem Körper K) primär als Zeilenvektor, dessen Elemente die Spalten von A sind; also

$$A = (a_1, \ldots, a_n),$$

wobei a_i die i-te Spalte der Matrix A ist. Für solche quadratische Matrizen A werden wir eine Abbildung in den Grundkörper K angeben, die Determinante von A, welche ein Kriterium für die Singularität (also Nichtinvertierbarkeit) von A darstellt.

Definition 7.1: *Sei D eine Abbildung von quadratischen Matrizen der Dimension n in den Grundkörper, also*

$$D : \mathrm{Mat}_{n\times n}(K) \longrightarrow K \ .$$

Wir fassen D auf als Funktion der Spalten der Matrix A, also $D(A) = D(a_1, \ldots, a_n)$. Im folgenden sind i, j immer Spaltenindizes, also $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.
D ist **multilinear**, *g.d.w. für alle i, j und alle $\lambda \in K$ gilt:*

(D1) $D(\ldots, b_i + c_i, \ldots) = D(\ldots, b_i, \ldots) + D(\ldots, c_i, \ldots)$, *und*
(D2) $D(\ldots, \lambda a_i, \ldots) = \lambda D(\ldots, a_i, \ldots)$.

D ist **alternierend** *g.d.w. für alle $i \neq j$ gilt:*

(D3) $D(\ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots) = -D(\ldots, a_j, \ldots, a_i, \ldots)$.

D ist **identitätserkennend** *g.d.w.*

(D3') $D(A) = 0$ *falls A zwei identische Spalten hat.*

D ist **1-erhaltend** *g.d.w.*

(D4) $D(I_n) = 1$.

D heisst eine **Determinantenfunktion** *g.d.w. D multilinear, alternierend und 1-erhaltend ist; also wenn D die Eigenschaften (D1), (D2), (D3) und (D4) besitzt.*

Satz 7.2: *Eine Abbildung $D : \mathrm{Mat}_{n\times n}(K) \to K$ ist eine Determinantenfunktion g.d.w. sie die Eigenschaften (D1), (D2), (D3') und (D4) besitzt.*

Satz 7.3: *Sei $D : \mathrm{Mat}_{n\times n}(K) \to K$ eine Determinantenfunktion. Wenn die Spalten von A linear abhängig sind, so ist $D(A) = 0$.*

Satz 7.4: *Sei $D_2 : \mathrm{Mat}_{2\times 2}(K) \to K$ die folgende Abbildung von 2×2 Matrizen in den Grundkörper:*

$$\begin{array}{rccl} D_2 : & \mathrm{Mat}_{2\times 2}(K) & \longrightarrow & K \\ & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} & \mapsto & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \ . \end{array}$$

Dann ist diese Funktion D_2 die einzige Determinantenfunktion auf 2×2 Matrizen.

Im folgenden wollen wir nun für beliebige Dimension zeigen, dass es genau eine Determinantenfunktion gibt. Dass dies für 1×1 Matrizen (a) gilt, ist klar. Die eindeutig bestimmte Determinantenfunktion ist $D_1(a) = a$.

Satz 7.5: *Sei $n \geq 3$ und sei $D : \mathrm{Mat}_{(n-1)\times(n-1)}(K) \to K$ eine Determinantenfunktion. Für eine $n \times n$ Matrix A bezeichne A_{ij} die Matrix, welche aus A entsteht durch Streichung der i-ten Zeile und j-ten Spalte. Dann ist für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ die Funktion*

$$\begin{array}{rccl} f_i : & \mathrm{Mat}_{n\times n}(K) & \longrightarrow & K \\ & A & \mapsto & \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D(A_{ij}) \end{array}$$

eine Determinantenfunktion. Es gibt also für jede Dimension von Matrizen eine Determinantenfunktion.

Beispiel 7.6: Wir gehen aus von der Determinantenfunktion D_2 auf 2×2 Matrizen. So wie im Satz 7.5 ergeben sich daraus die Determinantenfunktionen f_i auf 3×3 Matrizen wie folgt:

$$f_1 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$a_{11} \cdot D_2 \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \cdot D_2 \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \cdot D_2 \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} =$$

$$f_2 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = f_3 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} .$$

Wir sehen, dass man den eindeutig bestimmten Wert der Determinantenfunktionen f_i auf 3×3 Matrizen wie folgt nach der sogenannten **Regel von Sarrus** bestimmen kann: man bildet die 3 Produkte der Parallelen zur Diagonale, sowie die negativen Werte der 3 Produkte der Parallelen zur Antidiagonale, und summiert diese 6 Summanden auf. □

Um die Eindeutigkeit der Determinatenfunktion für beliebiges n nachzuweisen, gehen wir zunächst einen Umweg. Wir untersuchen gewisse Eigenschaften von Permutationen (also Bijektionen) auf endlichen Mengen. Vergleiche dazu Beispiel 1.5.6(6).

Definition 7.7: *Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine* **Permutation** *auf der Menge $\{1, \ldots, n\}$ ist eine Bijektion auf dieser Menge. Wir schreiben üblicherweise eine Permutation σ als*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} .$$

Die **Menge der Permutationen** *auf $\{1, \ldots, n\}$ bezeichnen wir mit P_n.*
Die Hintereinanderausführung auf P_n nennen wir auch **Produkt**.
Eine **Transposition** *auf $\{1, \ldots, n\}$ ist eine Permutation τ, welche zwei Elemente i und j $(i \neq j)$ vertauscht, und alle anderen Elemente fix lässt; in Zeichen $\tau : i \leftrightarrow j$.*
Ist $\sigma \in P_n$, so heisst ein Paar (i, j) **Fehlstelle** *von σ, wenn gilt: $i < j$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$.*
Hat $\sigma \in P_n$ genau $f(\sigma)$ Fehlstellen, so heisst $(-1)^{f(\sigma)}$ die **Signatur** *von σ, in Zeichen* $\mathrm{sign}(\sigma)$.

Wie wir schon in Kapitel 1.5 gesehen haben, bildet P_n mit der Hintereinanderausführung von Funktionen, also dem Produkt, eine (nicht-abelsche) Gruppe.

Beispiel 7.8: Für $n = 0$ gibt es offensichtlich nur eine Permutation; ebenso für $n = 1$. Wir betrachten die Permutationen in P_6:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} .$$

Als Verknüpfungsergebnisse erhalten wir

$$\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} .$$

σ hat die 5 Fehlstellen $(2,3),(2,4),(2,5),(3,5),(4,5)$, also $\operatorname{sign}(\sigma) = (-1)^5 = -1$. □

Satz 7.9: *Jede Permutation $\sigma \in P_n$ kann ausgedrückt werden als Produkt von Transpositionen.*

Satz 7.10: *Für $\sigma, \tau \in P_n$ gilt $\operatorname{sign}(\tau \circ \sigma) = \operatorname{sign}(\tau) \cdot \operatorname{sign}(\sigma)$. Insbesondere gilt $\operatorname{sign}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sign}(\sigma)$.*

Defintion 7.11: *Eine Permutation σ heisst* **gerade**, *wenn $\operatorname{sign}(\sigma) = 1$, und* **ungerade**, *wenn $\operatorname{sign}(\sigma) = -1$.*

Satz 7.12 (Leibnizsche Determinantenformel): *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine eindeutig bestimmte Determinantenfunktion $D_n : \mathrm{Mat}_{n\times n}(K) \to K$, welche beschrieben werden kann als*

$$D_n(A) \;=\; \sum_{\sigma \in P_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \;.$$

Aus Satz 7.12 sehen wir auch, dass die in Satz 7.5 eingeführten Determinatenfunktionen f_i unabhängig von i sind, also allesamt dasselbe Ergebnis liefern.

Definition 7.13: *Die laut Satz 7.12 eindeutig bestimmte Determinantenfunktion auf $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ bezeichnen wir mit $\det$. Für eine $n \times n$ Matrix $A = (a_{ij})$ heisst*

$$\det(A) \;=\; \sum_{\sigma \in P_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

die **Determinante** *von A. Wir schreiben die Determinante auch als $\det(A) = |a_{ij}|$.*
Die Darstellung der Determinante $\det(A)$ wie in Satz 7.5, also

$$\det(A) \;=\; \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

*heisst die (***Laplace-***)* **Entwicklung von** $\det(A)$ **nach der** i**-ten Zeile**. (P.S. Laplace, 1719–1790)

Satz 7.14: *Für eine quadratische Matrix A gilt: $\det(A) = \det(A^T)$.*

Korollar: *Für jeden Spaltenindex j gilt auch eine Entwicklung von $\det(A)$ nach der j-ten Spalte, also*

$$\det(A) \;=\; \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \;.$$

Korollar: *Die Eigenschaften (D1), (D2), (D3), (D3') und (D4) der Determinantenfunktion gelten nicht nur für Spalten, sondern auch für Zeilen.*

Beispiel 7.15: Ist A eine quadratische Matrix in oberer Dreiecksform, also $a_{ij} = 0$ für alle $i > j$, so ist $\det(A) = |A|$ besonders einfach zu bestimmen, nämlich als das Produkt der Diagonalelemente

$$|A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} .$$

Das sieht man aus der Spaltenentwicklung von $|A|$.
Dasselbe gilt für untere Dreiecksmatrizen wegen der Zeilenentwicklung von $|A|$. □

Eine Möglichkeit, die Determinate einer Matrix A zu berechnen, ist die Transformation mittels Zeilen- (bzw. Spalten-) umformungen in eine obere Dreiecksmatrix, unter Ausnutzung der Beziehungen (D1 – 4). Dann braucht man nur noch das Produkt der Diagonalelemente zu bilden.

Beispiel 7.16: Für $a_1, \ldots, a_n \in K$ betrachten wir die Matrix

$$A_n(a_1, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

bzw. ihre Determinate

$$V_n(a_1, \ldots, a_n) := \det(A_n) .$$

Man nennt $V_n(a_1, \ldots, a_n)$ die **Vandermonde Determinante** für $a_1, \ldots, a_n$.
Sind etwa $a_i = a_j$ für $i \neq j$, so hat $A_n(a_1, \ldots, a_n)$ zwei identische Zeilen und ist also wegen (D3') gleich 0.
Allgemein zeigen wir:

$$V_n(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) . \qquad (*)$$

Dazu gehen wir induktiv nach n vor. Für $n = 1$ gilt $(*)$ offensichtlich. Sei also nun $n > 1$. Wir multiplizieren für $j = n-1, \ldots, 1$ die j-te Spalte mit a_1 und subtrahieren sie von der $(j+1)$-ten Spalte. Dabei verändert sich wegen (D1) und (D2) die Determinante nicht. Anschliessend ziehen wir jeweils aus der i-ten Zeile (für $i > 1$) den Faktor $a_i - a_1$ heraus. Schliesslich entwickeln wir die Determinante nach der ersten Zeile. Wir erhalten also

$$\det(V_n(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & \cdots & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n - a_1 & \cdots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{i=2}^{n} (a_i - a_1) V_{n-1}(a_2, \ldots, a_n) .$$

Mit der Induktionshypothese ergibt sich daraus die Behauptung $(*)$.

Wir berechnen $V_4(1, 2, 3, 4)$ mittels Maple:

```
> with(LinearAlgebra);
> A4 := Matrix([[1,a1,a1∧2,a1∧3], [1,a2,a2∧2,a2∧3], [1,a3,a3∧2,a3∧3],
>               [1,a4,a4∧2,a4∧3]]);
```

$$A4 := \begin{bmatrix} 1 & a1 & a1^2 & a1^3 \\ 1 & a2 & a2^2 & a2^3 \\ 1 & a3 & a3^2 & a3^3 \\ 1 & a4 & a4^2 & a4^3 \end{bmatrix}$$

> **V4 := Determinant(A4):**
> **factor(V4);**

$$(-a4+a3)(a2-a4)(a2-a3)(-a4+a1)(a1-a3)(a1-a2)$$

> **A4one := subs({a1=1,a2=2,a3=3,a4=4},A4);**

$$A4one := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{bmatrix}$$

> **V4one := Determinant(A4one):**

$$V4one := 12$$

Wir führen auch einige der oben beschriebenen Spaltenoperationen explizit aus:
> **M := A4;**

$$M := \begin{bmatrix} 1 & a1 & a1^2 & a1^3 \\ 1 & a2 & a2^2 & a2^3 \\ 1 & a3 & a3^2 & a3^3 \\ 1 & a4 & a4^2 & a4^3 \end{bmatrix}$$

> **M := ColumnOperation(M,[4,3],-a1);**

$$M := \begin{bmatrix} 1 & a1 & a1^2 & 0 \\ 1 & a2 & a2^2 & a2^3 - a1a2^2 \\ 1 & a3 & a3^2 & a3^3 - a1a3^2 \\ 1 & a4 & a4^2 & a4^3 - a1a4^2 \end{bmatrix}$$

> **M := ColumnOperation(M,[3,2],-a1);**

$$M := \begin{bmatrix} 1 & a1 & 0 & 0 \\ 1 & a2 & a2^2 - a1a2 & a2^3 - a1a2^2 \\ 1 & a3 & a3^2 - a1a3 & a3^3 - a1a3^2 \\ 1 & a4 & a4^2 - a1a4 & a4^3 - a1a4^2 \end{bmatrix}$$

> **M := ColumnOperation(M,[2,1],-a1);**

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a2 - a1 & a2^2 - a1a2 & a2^3 - a1a2^2 \\ 1 & a3 - a1 & a3^2 - a1a3 & a3^3 - a1a3^2 \\ 1 & a4 - a1 & a4^2 - a1a4 & a4^3 - a1a4^2 \end{bmatrix}$$

Entwickelt man die Determinante dieser Matrix nach der ersten Zeile, so ergibt sich offensichtlich

$$V_4(a_1, a_2, a_3, a_4) \;=\; (a_4 - a_1)(a_3 - a_1)(a_2 - a_1)V_3(a_2, a_3, a_4)\ ,$$

in Übereinstimmung mit obigem Induktionsbeweis. □

Die Determinantenfunktion ist multiplikativ; das sehen wir im folgenden Satz.

Satz 7.17: *Für $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ gilt:*

$$|A \cdot B| \;=\; |A| \cdot |B| \;.$$

Korollar: *Ist A invertierbar, dann gilt $|A| \neq 0$ und $|A^{-1}| = 1/|A|$.*

Die Determinante charakterisiert also die Invertierbarkeit einer quadratischen Matrix A (vgl. Satz 7.3 und Korollar zu Satz 7.17). Wir wollen nun aus der Determinante eine Formel für die Inverse herleiten. Dazu führen wir den Begriff der adjungierten Matrix ein. Wir erinnern daran, dass A_{ij} die Matrix bezeichnet, welche wir aus A erhalten durch Streichung der i-ten Zeile und j-ten Spalte.

Definition 7.18: *Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$. Dann ist die* **adjungierte Matrix** *bzw.* **Adjungierte** *von A, in Zeichen $\mathrm{adj}(A)$, diejenige $n \times n$ Matrix, deren Element in der i-ten Zeile und j-ten Spalte*

$$(-1)^{i+j}|A_{ji}|$$

ist.

Man beachte die Umkehrung der Indizes in Definition 7.18

Satz 7.19: *Für jede quadratische Matrix gilt $(\mathrm{adj}(A))^T = \mathrm{adj}(A^T)$.*

Satz 7.20: *Für jede $n \times n$ Matrix A gilt:*

$$A \cdot \mathrm{adj}(A) \;=\; |A| \cdot I_n \;=\; \mathrm{adj}(A) \cdot A \;.$$

Satz 7.21: *Eine quadratische Matrix A ist invertierbar g.d.w. $|A| \neq 0$; in diesem Fall ist*

$$A^{-1} \;=\; \frac{1}{|A|}\mathrm{adj}(A) \;.$$

Determinanten von Diagonalmatrizen bzw. Blockdiagonalmatrizen sind besonders einfach auszurechnen. Sind $B = (b_{ij})_{p\times p}$ und $C = (c_{ij})_{q\times q}$ quadratische Matrizen, so ist

$$A = (a_{ij})_{n\times n}, \text{ mit } n = p + q \text{ und } a_{ij} = \begin{cases} b_{ij} & \text{falls } i, j \leq p \\ c_{i-p,j-p} & \text{falls } p+1 \leq i, j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Blockdiagonalmatrix mit Blöcken B und C. Die Matrix A hat also die Gestalt

$$A \;=\; \begin{pmatrix} B & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & C \end{pmatrix} \qquad\qquad (*)$$

Satz 7.22:

(a) *Ist $A = (a_{ij})$ eine $n \times n$ Diagonalmatrix, so ist $|A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.*

(b) *Ist* $A = (a_{ij})_{n\times n}$ *eine Blockdiagonalmatrix mit Blöcken* $B = (b_{ij})_{p\times p}$ *und* $C = (c_{ij})_{q\times q}$ *wie in (*), so ist* $|A| = |B| \cdot |C|$.

Definition 7.23: *Die Untergruppe von* $GL_n(K)$*, welche aus den Matrizen mit Determinante 1 besteht, heisst die* **spezielle lineare Gruppe** *(***special linear group***) vom Grad* n *über* K*,* $SL_n(K)$*.*

Determinanten und lineare Gleichungssysteme

Mittels Determinanten können wir für ein SLG $Ax = b$ mit regulärer quadratischer Matrix A eine Lösungsformel angeben. Diese Formel heisst die **Cramersche Regel** (Gabriel Cramer, 1704–1752).

Satz 7.24: *Sei* $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ *mit* $|A| \neq 0$*, und sei* b *ein Spaltenvektor über* K *der Länge* n*. Seien* $a_1, \ldots, a_n$ *die Spalten von* A*, also* $A = (a_1, \ldots, a_n)$*. Dann können die Komponenten* x_i *der eindeutigen Lösung von* $Ax = b$ *ausgedrückt werden als*

$$x_i \;=\; \frac{|a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n|}{|A|} \;.$$

Beispiel 7.25: Wir betrachten das SLG aus Beispiel 3.1, also

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 23 \end{pmatrix} \quad ,$$

welches die eindeutig bestimmte Lösung $x = (12, 5, -2)^T$ besitzt.
Als Determinante der Koeffizientenmatrix erhalten wir $|A| = 10$.
Ersetzen wir die erste Spalte von A durch die rechte Seite b, so ist die Determinante dieser Matrix 120.
Somit ergibt sich nach der Cramerschen Regel $x_1 = 120/10 = 12$. □