

Name:

Matr.Nr.:

Stud.Kennz.:

Klausur
“Lineare Algebra und Analytische Geometrie I” (326036)
1.2.2014

Bitte beachten Sie folgendes:

- Schriftliche Unterlagen sowie elektronische Geräte dürfen NICHT zur Klausur verwendet werden.
- Tragen Sie – noch bevor Sie zu arbeiten beginnen — auf dem Angabenblatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Studienkennzahl ein. Schreiben Sie auf jedes Blatt, das Sie verwenden, links oben Ihren Namen.
- Geben Sie das ausgefüllte Angabenblatt zusammen mit Ihren Lösungen ab. Sie finden das Angabenblatt demnächst auf der Webseite der Vorlesung.
- Verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt (oder mehrere), und geben Sie Ihre Lösungen nach Aufgabennummern geordnet ab, also beginnend mit der ersten Aufgabe.

Aufgabe 1:Beweisen Sie für alle natürlichen Zahlen n :

$$\sum_{i=0}^n i(i+1) = \frac{1}{3} \cdot (n^3 + 3n^2 + 2n) .$$

Aufgabe 2:

- (a) Geben Sie eine Definition für die Gleichmächtigkeit zweier Mengen.
- (b) Geben Sie eine bijektive Funktion $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ an; durch eine Formel oder durch verbale Beschreibung. Begründen Sie Ihre Antwort.
 Was folgt daraus für den Vergleich der Mächtigkeiten dieser Mengen?

Aufgabe 3:

- (a) Geben Sie eine Definition eines Vektorraums.
- (b) Definieren Sie den Begriff der linearen Unabhängigkeit einer Teilmenge S eines Vektorraums V .
- (c) Definieren Sie den Begriff der Basis eines Vektorraums V .

Aufgabe 4:

Betrachten Sie das folgende System linearer Gleichungen über \mathbb{R} :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}}_b.$$

- (a) Bestimmen Sie alle Lösungen dieses Gleichungssystems.
- (b) Wieviele linear unabhängige Zeilen hat die Koeffizientenmatrix A ?
Wieviele linear unabhängige Zeilen hat die erweiterte Matrix $(A|b)$?
- (c) Wie hängen $\text{rang}(A)$, $\text{rang}(A|b)$ und die Lösbarkeit eines inhomogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ zusammen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5:

Betrachten Sie die reellen Vektorräume

$P := \text{Pol}_2(\mathbb{R})$ Polynome vom Grad ≤ 2 mit Koeffizienten in \mathbb{R} ,

$M := \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ 2×2 Matrizen mit Elementen in \mathbb{R} ,

sowie die Abbildung

$$f : \quad P \quad \longrightarrow \quad M \\ a + bx + cx^2 \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} b+c & a \\ b & c \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass f linear ist.
- (b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von f bzgl. der geordneten Basen

$$B = (1, x, x^2) \quad \text{und} \quad C = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

- (c) Bestimmen Sie $\text{kern}(f)$, $\dim(\text{kern}(f))$ und $\dim(\text{im}(f))$.

Aufgabe 6:

- (a) Seien V und W endlichdimensionale Vektorräume über dem Körper K , mit $W \subseteq V$.
Zeigen Sie: *Es gibt einen Vektorraum $\tilde{W} \subseteq V$ sodass $V = W \oplus \tilde{W}$.*
- (b) Für $V = \mathbb{R}^4$, $W = \text{span}(\{(1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\})$, wie sieht ein möglicher Raum \tilde{W} aus? Begründen Sie Ihre Antwort.