

Analysis für Informatiker

Manuel Kauers

Winter 2012/2013

Stand: 7. Februar 2013

Inhaltsverzeichnis

0	Vorbemerkungen	2
0.1	Worum geht's?	2
0.2	Wen interessiert's?	2
0.3	Was braucht man?	3
0.4	Was steht im Skriptum?	6
1	Zahlen	7
2	Folgen	8
3	Reihen	9
4	Stetigkeit	11
5	Differenzierbarkeit	13
6	Anwendungen	14
7	Integration	15
8	Gebirge	16
8.1	Stetigkeit	16
8.2	Differenzierbarkeit	17
8.3	Extremwerte	17
9	Volumen	18
10	Kurven	20
11	Kurvenintegrale	21

0 Vorbemerkungen

0.1 Worum geht's?

Es geht in erster Linie um die *reellen Zahlen* und um Funktionen, die (eine oder mehrere) reelle Zahlen auf (eine oder mehrere) reelle Zahlen abbilden. Solche Funktionen will man zum Beispiel dazu verwenden, geometrische Gebilde zu beschreiben, die sich nicht durch einfache Liniensegmente fassen lassen, weil sie gebogen und gekrümmt sind. Welche Funktionen eignen sich dazu, welche nicht? Wie unterscheidet man stärker gekrümmte Kurven von weniger stark gekrümmten? Unter welchen Voraussetzungen lässt sich bei einer gebogenen Kurve sagen, welche Länge sie hat? Und was soll „Länge“ bei gekrümmten Objekten überhaupt bedeuten? Wie bestimmt man den Flächeninhalt eines Gebietes, das von einer krummlinigen Kurve umrandet ist? Oder das Volumen eines Gebietes im dreidimensionalen Raum, das von einer unregelmässig gewölbten Fläche begrenzt wird? Und was kann man machen, wenn der Raum mehr als drei Dimensionen hat? Von diesen und ähnlichen Fragen werden wir uns leiten lassen, wenn wir Begriffe einführen, um Funktionen zu klassifizieren, und Sätze herleiten, die diese Begriffe zueinander in Beziehung setzen.

0.2 Wen interessiert's?

Physiker und Ingenieure verwenden die Begriffe und Methoden der Analysis ständig. Für Ingenieure liegt das auf der Hand: Fast alles, was heute produziert wird, ist in irgendeiner Weise gewölbt (Wasserflaschen, Flugzeugtragflächen, Kugelschreibergehäuse, die Tasten einer Laptop-tastatur, ...). Um solche Produkte zu modellieren und um Maschinen zu bauen, die solche Dinge herstellen, verwendet man die Sprache der Analysis. Physiker verwenden die Sprache der Analysis, um Naturgesetze zu formulieren. Dabei beziehen sie die reellen Zahlen nicht nur auf Längen im Raum, sondern messen auch Kräfte, Massen, Energien, Zeiten, Geschwindigkeiten, und vieles andere mit ihnen. Dass die zentralen Begriffe der Analysis die Zusammenhänge zwischen physikalischen Größen frappierend genau zu fassen vermögen, war eine der wesentlichen Triebfedern in der Entwicklung der Analysis während des 18. und 19. Jahrhunderts.

Und die Informatiker? Die haben ein Problem. Es ist nämlich aus gewissen berechenbarkeits-theoretischen Gründen prinzipiell *unmöglich*, mit reellen Zahlen zu rechnen. Es ist sogar schon unmöglich, eine Datenstruktur zu entwerfen, mit der man reelle Zahlen im Computer darstellen kann. Gleitkommazahlen werden zwar in manchen Programmiersprachen als „reals“ bezeichnet, aber das ist mit Vorsicht zu genießen, denn die meisten reellen Zahlen können durch Gleitkommazahlen bestenfalls *näherungsweise* dargestellt werden. Wer mit *exakten* Zahlen rechnen will, muss sich auf einen kleineren Zahlenraum beschränken, zum Beispiel auf die rationalen Zahlen – dort funktioniert dann allerdings die Analysis nicht mehr.

Trotz dieser grundsätzlichen Unvereinbarkeit gibt es gute Gründe, warum sich Studierende der Informatik mit Analysis beschäftigen sollten.

- Grundkenntnisse in Analysis gehören zur naturwissenschaftlich-technischen Allgemeinbildung. Potentielle Auftraggeber von Informatikern sprechen eher die Sprache der Analysis als etwa die Sprache der Algebra. Wenn man diese Sprache beherrscht, und sei es bloß als Fremdsprache, erleichtert das die Kommunikation über die eigenen Fachgrenzen hinweg. Dass am Ende in der konkreten Software nie „echte“ reelle Funktionen behandelt werden können, sondern immer nur irgendwelche Annäherungen, wird den Anwender kaum davon abhalten, auf konzeptueller Ebene idealisierend trotzdem über reelle Funktionen zu sprechen. Die technische Umsetzung, z. B. durch die Wahl geeigneter Digitalisierungsverfahren, ist Aufgabe der Informatiker.
- Analysis ist ein Musterbeispiel für eine nichttriviale mathematische Theorie. An ihr kann man beispielhaft nachvollziehen, wie die Sätze und Definitionen einer Theorie ineinander

greifen, ähnlich wie sich verschiedene Programmteile in einer komplizierten Software gegenseitig aufrufen – hoffentlich ohne sich dabei zu verhaken. Wer im Verlauf des Semesters bewusst darauf achtet, dass die vorgeführten Beweise widerspruchsfrei sind und Definitionen sich nicht im Kreis aufeinander beziehen, trainiert damit genau die gleichen Fähigkeiten, die man braucht, um solide Software zu entwerfen. Und wer versucht, zwischen all den Sätzen und Definitionen den roten Faden nicht zu verlieren und den Überblick über „das große Ganze“ zu behalten, trainiert damit zugleich die Fähigkeiten, die man braucht, um sich im Code von umfangreichen Softwareprojekten zurechtzufinden.

- Drittens gibt es auch Situationen, in denen man als Informatiker selbst Analysis braucht. Ein Anwendungsbereich ist zum Beispiel die Computergrafik. Algorithmen zur Berechnung von realistischen Texturen und Schattierungen auf dreidimensionalen Objekten beruhen auf Sätzen aus der Analysis. Ein weiterer Anwendungsbereich ist die Komplexitätsanalyse. Bei den meisten Standardalgorithmen gelingt es zwar, die Komplexität mit elementaren Mitteln zu bestimmen, aber wenn das mal nicht gelingt, sind es Werkzeuge aus der Analysis, die man zur Bestimmung der Komplexität von Algorithmen heranzieht.

0.3 Was braucht man?

Bevor man in die eigentliche Analysis einsteigt, sollte man sich vergewissern, dass man mit den *logischen Grundlagen* vertraut ist. Mit „logisch“ ist dabei nicht der „gesunde Menschenverstand“ gemeint – obwohl der natürlich auch vorhanden sein sollte – sondern das formale Regelwerk der Mathematik, also die Regeln, nach denen in der Mathematik Aussagen formuliert und Beweise geführt werden. Die Kenntnis dieses Regelwerks setzen wir im wesentlichen als aus anderen Lehrveranstaltungen bekannt voraus und begnügen uns hier mit einer knappen Zusammenfassung.

Hinreichend bekannt ist sicher die *Aussagenlogik*, d. h. der Umgang mit den logischen Verknüpfungen \wedge (und), \vee (oder), \neg (nicht), usw. Zum Beispiel gelten hier Rechenregeln wie

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B),$$

in Worten: A oder B gilt genau dann nicht, wenn sowohl A nicht gilt als auch B nicht gilt. Die Variablen A und B stehen hier für einen unbekanntem Wahrheitswert, der für True oder False stehen kann. Um eine Formel in der Aussagenlogik zu *beweisen*, braucht man nur alle möglichen Belegungen für A und B durchprobieren. Natürlich muss man dabei die Definition der Verknüpfungen verwenden, um z. B. $\text{True} \vee \text{False}$ zu True zu vereinfachen. Die Aussage ist bewiesen, wenn die Formel sich für jede Belegung zu True vereinfacht.

In der *Prädikatenlogik* stehen die Variablen nicht mehr für Wahrheitswerte, sondern sie bezeichnen gewisse Objekte (z. B. Zahlen). Ein *Prädikat* ist dann eine Funktion, die einem gegebenen Objekt (oder auch mehreren) einen Wahrheitswert zuordnet (z. B. „ist-größer-als“ für ein Paar von Zahlen). Charakteristisch für die Prädikatenlogik sind die beiden *Quantoren* \forall („für alle“) und \exists („es gibt ein“). Hier ist ein Beispiel:

$$\exists x : (p(x) \Rightarrow \forall y : p(y)).$$

Auf deutsch: „Es gibt ein Objekt x , für das gilt: Wenn x die Eigenschaft p hat, dann hat jedes Objekt die Eigenschaft p .“ Ist das wahr oder falsch? Und was bedeutet Wahrheit überhaupt in dieser Allgemeinheit? Wir wissen ja gar nicht, um welche Objekte x es überhaupt geht, oder was die Eigenschaft p sein soll. Je nachdem, wie wir die Formel *interpretieren*, kann sie womöglich mal wahr und mal falsch sein. Eine Interpretation legt fest, über welche Objekte gesprochen wird (das sogenannte *Universium* $U \neq \emptyset$ aller Objekte) und welche konkrete Bedeutung die verschiedenen Prädikatssymbole in einer Formel haben sollen. Hier sind zwei mögliche Interpretationen für obiges Beispiel:

- U = die Menge aller ganzen Zahlen, und $p(x) = \begin{cases} \text{True} & \text{falls } x \text{ positiv ist} \\ \text{False} & \text{falls nicht} \end{cases}$

Die Formel sagt dann: Es gibt eine ganze Zahl, so dass, wenn diese positiv ist, alle ganzen Zahlen positiv sind.

- $U =$ die Menge aller Menschen, und $p(x) = \begin{cases} \text{True} & \text{falls } x \text{ ein Trottel ist} \\ \text{False} & \text{falls nicht} \end{cases}$

Die Formel sagt dann: Es gibt jemanden, so dass, wenn der ein Trottel ist, jeder ein Trottel ist.

Sobald eine Interpretation fixiert ist, ist eine Formel definitiv entweder wahr oder falsch, selbst wenn möglicherweise nicht offensichtlich ist, welches von beiden. Im Fall obiger Formel ist es aber leicht. Sie ist nämlich immer wahr, unabhängig von der Interpretation. Hier ist der Beweis:

- *Schritt 1:*

Annahmen: keine.

Beweisziel: $\exists x : (p(x) \Rightarrow \forall y : p(y))$.

Wir machen erst mal eine Fallunterscheidung danach ob $\forall y : p(y)$ wahr ist oder nicht.

- *Schritt 2:*

Annahmen: $\forall y : p(y)$.

Beweisziel: $\exists x : (p(x) \Rightarrow \forall y : p(y))$.

Um eine Behauptung der Form $\exists x \dots$ zu beweisen, müssen wir ein x mit der gewünschten Eigenschaft beschaffen. Wähle irgendein Objekt x . Wir zeigen die Behauptung für dieses Objekt.

- *Schritt 3:*

Annahmen: $\forall y : p(y)$.

Beweisziel: $p(x) \Rightarrow \forall y : p(y)$.

Nach Annahme gilt $\forall y : p(y)$, d.h. die Eigenschaft p gilt für alle Objekte. Also gilt insbesondere $p(x)$ für das Objekt x , das wir in Schritt 2 gewählt haben. Das Beweisziel lässt sich also vereinfachen zu $\text{True} \Rightarrow \text{True}$. Nach den Regeln der Aussagenlogik ist das wahr. Damit ist dieser Fall erledigt.

- *Schritt 4:*

Annahmen: $\neg \forall y : p(y)$.

Beweisziel: $\exists x : (p(x) \Rightarrow \forall y : p(y))$.

Nach Annahme haben nicht alle Objekte die Eigenschaft p . Daraus folgt, dass wenigstens ein Objekt die Eigenschaft p nicht hat. Wir können also die Annahme umschreiben zu $\exists y : \neg p(y)$.

- *Schritt 5:*

Annahmen: $\exists y : \neg p(y)$.

Beweisziel: $\exists x : (p(x) \Rightarrow \forall y : p(y))$.

Um eine Behauptung der Form $\exists x \dots$ zu beweisen, müssen wir wieder ein x mit der gewünschten Eigenschaft beschaffen. Diesesmal wählen wir ein Objekt x mit der Eigenschaft $\neg p(x)$. Nach Annahme ist das ja möglich.

- *Schritt 6:*

Annahmen: $\exists y : \neg p(y)$.

Beweisziel: $p(x) \Rightarrow \forall y : p(y)$.

Nach Wahl von x in Schritt 5 ist $\neg p(x)$ wahr, also ist $p(x)$ falsch. Die Annahme besagt auch, dass $\forall y : p(y)$ falsch ist. Das Beweisziel lässt sich also vereinfachen zu $\text{False} \Rightarrow \text{False}$. Nach den Regeln der Aussagenlogik ist das wahr. Damit ist dieser Fall auch erledigt.

- *Schritt 7: Zusammenfassung.*

Es gilt entweder $\forall y : p(y)$ oder $\neg \forall y : p(y)$. Für jeden dieser beiden Fälle haben wir gezeigt, dass die Behauptung $\exists x : (p(x) \Rightarrow \forall y : p(y))$ wahr ist. Also ist sie insgesamt wahr.

Streng formal gesehen ist ein Beweis ein Baum, dessen Knoten logischen Aussagen sind, wobei die Blätter Annahmen oder Definitionen oder schon bewiesene Theoreme sind, die Wurzel ist die zu beweisende Behauptung, und jede Aussage in dem Baum folgt durch einen Beweisschritt aus den Aussagen in ihren Kinder-Knoten. Als Beweisschritt ist dabei alles zugelassen, was von Aussagen- und Prädikatenlogik gedeckt ist. Insbesondere folgende Beweisschritte sind nützlich:

- $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ (Modus Ponens)
- $((A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ (Fallunterscheidung)
- $(\neg A \Rightarrow \text{False}) \Rightarrow A$ (Widerspruchsbeweis)
- $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$ (Hin- und Rückrichtung)
- $(\neg \forall x : p(x)) \Leftrightarrow (\exists x : \neg p(x))$ (Gegenbeispiel)

Es gibt auch Beweisschritte, die nur für bestimmte Theorien gelten. Zum Beispiel das Induktionsprinzip in der Theorie der natürlichen Zahlen:

- $(P(0) \wedge \forall x : P(x) \Rightarrow P(x+1)) \Rightarrow \forall x : P(x)$ (Induktion)

Die Aussagen, die während eines Beweises auftauchen, lassen sich in zwei Gruppen einteilen: die, von denen man weiss, dass sie wahr sind (weil man es annimmt, oder sie schon vorher bewiesen hat, oder weil es Definitionen oder Axiome sind), und die, von denen man zeigen will, dass sie wahr sind. Die bekannten Aussagen stehen im Beweisbaum unten, die zu zeigenden Aussagen stehen oben, und die Aufgabe besteht darin, die einen mit den anderen zu verbinden. Dazu kann man von unten nach oben vorgehen (z. B. „Es gilt A , aus A folgt B , also gilt auch B “) oder von oben nach unten (z. B. „Wir wollen B zeigen, aus A folgt B , daher genügt es, A zu zeigen“). Bei Aussagen mit Quantoren behandelt man die entsprechenden Beweissituationen wie folgt:

- Annahme: $\exists x : p(x)$
 \rightsquigarrow „Sei x ein Objekt mit der Eigenschaft $p(x)$ “
- Annahme: $\forall x : p(x)$
 \rightsquigarrow „Dann gilt auch $p(17)$ “ (Dabei steht 17 beispielhaft für ein Objekt, das wir als Autor Beweises beliebig wählen können.)
- Zu zeigen: $\exists x : p(x)$
 \rightsquigarrow „Wir zeigen $p(17)$.“ (Wie vorher steht 17 beispielhaft für ein Objekt, das wir als Beweisautor beliebig wählen können.)
- Zu zeigen: $\forall x : p(x)$
 \rightsquigarrow „Sei x ein beliebiges Objekt. Wir zeigen $p(x)$.“ (Hier müssen wir die Wahl des „beliebigen“ Objekts dem Leser überlassen. Die folgenden Schritte des Beweises müssen so sein, dass der Leser für x irgendein Objekt einsetzen kann und das Argument für jede noch so fiese Wahl korrekt bleibt. Nur dann hat man wirklich bewiesen, dass $p(x)$ für alle Objekte x wahr ist.)

Gerne verwendet, aber leider *unzulässig* sind folgende „Beweisschritte“:

- „Ich kann es mir nicht anders vorstellen“
- „Man sieht es deutlich an der Zeichnung“
- „Es steht auf Wikipedia“
- „Die anderen haben es auch so“

Allerdings sind Intuition, Zeichnungen, Wikipedia, und Diskussionen mit Kollegen nützliche Hilfsmittel, von denen man bei der Suche nach einem Beweis durchaus Gebrauch machen darf. Nur im Endergebnis dürfen sie nicht mehr vorkommen. Wie sucht man also nach einem Beweis? Blindes Anwenden von logischen Umformungen führt normalerweise nicht zum Ziel. Dazu ist die Mathematik ein Suchbaum mit viel zu vielen falschen Pfaden. Stattdessen sollte man wie folgt vorgehen:

- Sicherstellen, dass für alle Begriffe, die in der Behauptung auftauchen, klar ist, was sie genau bedeuten (notfalls Definitionen nachschlagen).
- Versuchen, informal zu verstehen „warum“ die Behauptung richtig ist. (Wie müsste ein Gegenbeispiel aussehen? Was passiert, wenn man die Voraussetzungen abändert? Welche Sätze kenne ich über die Begriffe, die in der Behauptung vorkommen? Was sind typische Beispiele? Was sind extreme Fälle? Kenne ich einen Beweis für eine ähnliche Aussage?)
- Zuletzt das informale Argument als formalen Beweis mit Schlussregeln aufschreiben. (Ist der Beweis lückenlos? Ist er für den Leser nachvollziehbar?)

Einen allgemeinen Algorithmus zum systematischen „Ausrechnen“ eines Beweises gibt es nicht. Wohl aber gibt es inzwischen Algorithmen, die bestimmte spezielle Typen von Sätzen automatisch beweisen können, z. B. Gleichungen wie

- $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^n F_k = F_{n+1} - 1$ (F_n ist die n te Fibonaccizahl)
- $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ ($\binom{n}{k}$ ist der Binomialkoeffizient)
- $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} = (n+1) \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}$
- u.v.m.

Es ist sogar möglich, solche Gleichungen vom Computer finden zu lassen (gegeben ein komplizierter Summenausdruck, gesucht ein summenfreier Ausdruck mit der gleichen mathematischen Bedeutung oder ein Beweis, dass es einen solchen summenfreien Ausdruck nicht gibt).

Die Entwicklung und Erweiterung solcher Algorithmen ist eines der Arbeitsgebiete am Institut für Symbolisches Rechnen der JKU (<http://www.risc.jku.at>)

0.4 Was steht im Skriptum?

Dieses Skriptum soll weder ein Lehrbuch noch die Vorlesung ersetzen. Es beschränkt sich vielmehr auf eine Sammlung der Definitionen und Sätze, die in der Vorlesung behandelt wurden. Motivierende Einleitungen, Anwendungsbeispiele, geometrische Anschauung, Beweise, Übungsaufgaben oder gar historische Anekdoten wird man hier nicht finden.

Gewissermaßen enthält dieses Skriptum also nur den „compiled code“, aber (noch) nicht die dazugehörige Dokumentation. Vom Versuch, die Analysis nur anhand dieses Skriptums zu studieren, ist daher dringend abzuraten.

1 Zahlen

Definition 1. Es bezeichne \mathbb{R} eine Menge mit den Verknüpfungen

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

und dem Prädikat

$$\leq : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \{\text{True}, \text{False}\},$$

für die folgendes gelte:

1. $\forall a, b \in \mathbb{R} : a + b = b + a$
2. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a + (b + c) = (a + b) + c$
3. $\exists 0 \in \mathbb{R} \forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = a$
4. $\forall a \in \mathbb{R} \exists (-a) \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0$
5. $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \cdot b = b \cdot a$
6. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
7. $\exists 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = a$
8. $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists a^{-1} \in \mathbb{R} : a \cdot a^{-1} = 1$
9. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
10. $\forall a, b \in \mathbb{R} : (a \leq b \vee b \leq a)$
11. $\forall a, b \in \mathbb{R} : (a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b)$
12. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c)$
13. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c)$
14. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a \leq b \wedge 0 \leq c \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c)$
15. $\forall M \subseteq \mathbb{R}, M \neq \emptyset : \left((\exists S \in \mathbb{R} \forall x \in M : x \leq S) \right. \\ \left. \Rightarrow (\exists S_{\min} \in \mathbb{R} : (\forall x \in M : x \leq S_{\min}) \wedge (\forall S \in \mathbb{R} : (\forall x \in M : x \leq S) \Rightarrow S_{\min} \leq S)) \right)$

Die Elemente von \mathbb{R} heißen *reelle Zahlen*.

Statt ab^{-1} schreibt man auch a/b oder $\frac{a}{b}$ und statt $a + (-b)$ schreibt man auch $a - b$.

Statt $a \leq b$ schreibt man auch $b \geq a$, statt $a \leq b \wedge a \neq b$ schreibt man auch $a < b$, statt $a \geq b \wedge a \neq b$ schreibt man auch $a > b$, statt $a \leq b \wedge b \leq c$ schreibt man auch $a \leq b \leq c$, usw.

Für die Zahl S_{\min} aus Punkt 15 schreibt man $S_{\min} := \sup(M)$.

Definition 2. 1. Es seien $2 := 1 + 1$, $3 := 1 + 1 + 1$, $4 := 1 + 1 + 1 + 1$, \dots . Dann heißt

- (a) $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$ die Menge der *natürlichen Zahlen*,
- (b) $\mathbb{Z} := \{-a : a \in \mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$ die Menge der *ganzen Zahlen*,
- (c) $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \geq 1\}$ die Menge der *rationalen Zahlen*.

2. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Dann heißt

- (a) $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ das *geschlossene Intervall* von a bis b ,

- (b) $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ das *offene Intervall* von a bis b ,
 (c) $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ das (*links*) *halb-offene Intervall* von a bis b ,
 (d) $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ das (*rechts*) *halb-offene Intervall* von a bis b .
3. Für $c \geq 0$ und $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$, und $M := \{x \in \mathbb{R} : x^p \leq c\}$ sei $S \in \mathbb{R}$ die kleinste Zahl mit der Eigenschaft

$$\forall x \in M : x \leq S.$$

Dann heißt S die p -te *Wurzel aus c* . Notation: $\sqrt[p]{c} := S$.

Satz 1. Für die durch

$$|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad |a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

definierte Funktion (die sogenannte *Betragsfunktion*) gilt, für alle $a, b \in \mathbb{R}$:

1. $|a| \geq 0$
2. $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
3. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
4. $|a| = |-a|$
5. $a \leq |a|$
6. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)
7. $||a| - |b|| \leq |a - b|$

Satz 2. (Archimedes) $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n \geq x$.

2 Folgen

Definition 3. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion

$$a : \mathbb{N} \rightarrow M$$

heißt *Folge* in M .

Statt $a(n)$ schreibt man auch a_n und nennt diese Zahl das *n-te Folgenglied* der Folge a . Für a schreibt man auch (a_n) oder $(a_n)_{n=0}^\infty$.

Definition 4. Eine Folge $(a_n)_{n=0}^\infty$ in $U \subseteq \mathbb{R}$ heißt *konvergent*, falls gilt:

$$\exists a \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon.$$

In diesem Fall heißt a ein *Grenzwert* (GW) von $(a_n)_{n=0}^\infty$. Man sagt dann „Die Folge konvergiert gegen a “ und schreibt $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$.

Ist $(a_n)_{n=0}^\infty$ nicht konvergent, so heißt $(a_n)_{n=0}^\infty$ *divergent*.

Satz 3. Sind $a, b \in \mathbb{R}$ Grenzwerte einer konvergenten Folge $(a_n)_{n=0}^\infty$ in \mathbb{R} , so gilt $a = b$.

Notation. Für den nach Satz 3 eindeutig bestimmten Grenzwert a einer konvergenten Folge $(a_n)_{n=0}^\infty$ schreibt man $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Satz 4. (Sandwichtheorem) Seien $(a_n)_{n=0}^\infty$ und $(b_n)_{n=0}^\infty$ konvergente Folgen in \mathbb{R} mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$. Ferner sei $(c_n)_{n=0}^\infty$ so dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq c_n \leq b_n.$$

Dann ist auch $(c_n)_{n=0}^\infty$ konvergent und es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$.

Satz 5. Seien $(a_n)_{n=0}^\infty, (b_n)_{n=0}^\infty$ konvergente Folgen mit $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Dann gilt:

1. $a_n + b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a + b$
2. $a_n b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ab$
3. $|a_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |a|$
4. Ist $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbb{N}$ fest, $p \geq 1$, dann gilt

$$\sqrt[p]{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt[p]{a}.$$

5. Ist $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a \neq 0$, dann gilt $\frac{1}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a}$.
6. Gibt es nur endlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n \neq b_n$, dann gilt $a = b$.

Definition 5. Eine Folge $(a_n)_{n=0}^\infty$ heißt

1. *monoton steigend [fallend]*, falls gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n \quad [a_{n+1} \leq a_n].$$

2. nach oben [unten] *beschränkt*, falls gilt:

$$\exists S \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq S \quad [a_n \geq S].$$

In diesem Fall heißt S obere [untere] Schranke von $(a_n)_{n=0}^\infty$.

Satz 6. (Monotoniekriterium) Ist $(a_n)_{n=0}^\infty$ eine Folge in \mathbb{R} , die monoton steigend und nach oben beschränkt ist (oder: monoton fallend und nach unten beschränkt), dann ist $(a_n)_{n=0}^\infty$ konvergent.

3 Reihen

Definition 6. Sei $(a_n)_{n=0}^\infty$ eine Folge in \mathbb{R} . Die Folge $(s_n)_{n=0}^\infty$ sei definiert durch $s_n := \sum_{k=0}^n a_k$ ($n \in \mathbb{N}$).

Dann heißt $(s_n)_{n=0}^\infty$ die *Reihe* über $(a_n)_{n=0}^\infty$. Statt $(s_n)_{n=0}^\infty$ schreibt man auch $\sum_{n=0}^\infty a_n$.

Falls $(s_n)_{n=0}^\infty$ konvergiert, verwendet man das Symbol $\sum_{n=0}^\infty a_n$ auch als Bezeichnung für den Grenzwert.

Satz 7. Seien $(a_n)_{n=0}^\infty$ und $(b_n)_{n=0}^\infty$ Folgen in \mathbb{R} .

1. (Majorantenkriterium) Falls $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\sum_{n=0}^\infty b_n$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_{n=0}^\infty a_n$ und es gilt

$$\left| \sum_{n=0}^\infty a_n \right| \leq \sum_{n=0}^\infty b_n.$$

2. (Minorantenkriterium) Falls $a_n \geq b_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergiert, dann divergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Satz 8. Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in \mathbb{R} .

1. (Quotientenkriterium) Wenn $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \in \mathbb{R},$$

dann:

- (a) Ist $0 \leq a < 1$, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent.
 (b) Ist $a > 1$, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.

2. (Wurzelkriterium) Wenn

$$\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \in \mathbb{R},$$

dann:

- (a) Ist $0 \leq a < 1$, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent.
 (b) Ist $a > 1$, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.

Definition 7. Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge. Eine Reihe der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ nennt man *Potenzreihe*. Die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die diese Reihe konvergiert, heißt *Konvergenzbereich* der Potenzreihe. Ist $r \geq 0$ so, dass der Konvergenzbereich ein Intervall (offen, geschlossen oder halboffen) mit den Endpunkten $-r$ und r ist, dann heißt r der *Konvergenzradius* der Potenzreihe.

Definition 8. Für $x \in \mathbb{R}$ seien definiert:

1. $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ ("e hoch x")
2. $\sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ (Sinus von x)
3. $\cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ (Kosinus von x)

Satz 9. Es gilt:

1. $\exp(0) = 1, \sin(0) = 0, \cos(0) = 1$
2. $\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) > 0$
3. $\forall x, y \in \mathbb{R} : \exp(x+y) = \exp(x) \exp(y)$
4. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \Rightarrow \exp(x) < \exp(y)$
5. $\forall x \in \mathbb{R} : \sin(-x) = -\sin(x), \cos(-x) = \cos(x), |\sin(x)| \leq 1, |\cos(x)| \leq 1.$
6. $\forall x \in \mathbb{R} : \sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1.$
7. $\forall x, y \in \mathbb{R} : \sin(x+y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$
8. $\forall x, y \in \mathbb{R} : \cos(x+y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$

Satz 10. Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$ der Konvergenzbereich einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $B \subseteq \mathbb{R}$ der Konvergenzbereich einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Dann gilt:

1. Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und alle $x \in A \cap B$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) x^n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

2. Für alle $x \in A \cap B$ und die Folge $(c_n)_{n=0}^\infty$ mit $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right).$$

Insbesondere ist damit gesagt, dass die Reihen auf der linken Seite konvergieren.

4 Stetigkeit

Definition 9. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$.

1. Ein Punkt $x \in D$ heißt *isoliert*, falls gilt:

$$\exists \varepsilon > 0 : D \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon) = \{x\}.$$

2. D heißt *offen*, falls gilt

$$\forall x \in D \exists \varepsilon > 0 : (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq D.$$

3. D heißt *zusammenhängend*, falls gilt

$$\forall a, b \in D, a \leq b : [a, b] \subseteq D.$$

4. Die Menge

$$\bar{D} := \{x \in \mathbb{R} : \exists (x_n)_{n=0}^\infty \text{ in } D : x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x\}$$

heißt der *Abschluß* von D .

Konvention. Für Definitionsbereiche $D \subseteq \mathbb{R}$ von Funktionen wird im folgenden immer angenommen, dass D keine isolierten Punkte enthält.

Definition 10. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \bar{D}$.

f heißt *konvergent* bei x_0 , falls gilt

$$\exists y \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \setminus \{x_0\} : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - y| < \varepsilon.$$

Man schreibt dann $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} y$ oder $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$ und nennt y den (dann eindeutig bestimmten) Grenzwert von f bei x_0 .

Satz 11. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \bar{D}$, $y \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$ genau dann, wenn

$$\forall (x_n)_{n=0}^\infty \text{ in } D \setminus \{x_0\} : x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0 \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y.$$

Definition 11. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

1. f heißt *stetig* im Punkt $x_0 \in D$, falls

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0).$$

2. f heißt *stetig* (auf D), falls f stetig in jedem Punkt $x_0 \in D$ ist.

Satz 12. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen, $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$. Sind f und g stetig auf D , so sind auch

1. $f + g: D \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) + g(x)$,

2. $f \cdot g: D \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)g(x),$
3. $f/g: D \setminus \{x \in D : g(x) = 0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)/g(x)$

in ihrem jeweiligen Definitionsbereich stetig.

Sind $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: f(D) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann ist auch

$$g \circ f: D \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto g(f(x))$$

stetig.

Satz 13. Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in \mathbb{R} und $D \subseteq \mathbb{R}$ so, dass die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für jedes $x \in D$ konvergiert. Dann ist

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

stetig auf D .

Satz 14. (Zwischenwertsatz) Sei $D = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig auf D . Weiter sei $y \in [\min(f(a), f(b)), \max(f(a), f(b))]$. Dann existiert ein $x \in D$ mit $f(x) = y$.

Definition 12. Es sei π die kleinste positive reelle Zahl mit der Eigenschaft $\cos(\pi/2) = 0$.

Satz 15. Es gilt:

1. $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$, $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$, $\cos(x + \pi/2) = -\sin(x)$ (jeweils für alle $x \in \mathbb{R}$).
2. $\cos(\pi/3) = \frac{1}{2}$, $\cos(\pi/4) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\cos(\pi/6) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
3. $|\pi - 3.1415926536| < \frac{1}{10^{10}}$

Definition 13. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt

1. *monoton steigend*, falls $\forall x, y \in D : x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$,
2. *monoton fallend*, falls $\forall x, y \in D : x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$,
3. *streng monoton steigend*, falls $\forall x, y \in D : x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$,
4. *streng monoton fallend*, falls $\forall x, y \in D : x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

Satz 16. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ zusammenhängend und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton (steigend oder fallend). Dann ist auch die Umkehrfunktion

$$f^{-1}: f(D) \rightarrow \mathbb{R},$$

die jedem $y \in f(D)$ das (dann eindeutig bestimmte) $x \in D$ mit $f(x) = y$ zuordnet, überall stetig.

Definition 14. Die Funktion $\log: \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\forall y \in \mathbb{R} : \log(\exp(y)) = y$$

heißt *Logarithmus*.

5 Differenzierbarkeit

Definition 15. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

1. f heißt *differenzierbar* (db) im Punkt $x_0 \in D$, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. In diesem Fall schreibt man $f'(x_0)$ für den Grenzwert und nennt diese Zahl die (erste) *Ableitung* von f an der Stelle x_0 .

2. f heißt *differenzierbar* auf D , falls f differenzierbar in jedem Punkt $x_0 \in D$ ist. In diesem Fall heißt

$$f': D \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x)$$

die (erste) *Ableitung(sfunktion)* von f .

Satz 17. Ist $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in D$, dann ist f dort auch stetig.

Satz 18. Die Funktionen $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ seien differenzierbar auf D . Dann gilt:

1. $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ für alle $x \in D$,
2. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ für alle $x \in D$,
3. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ für alle $x \in D$ mit $g(x) \neq 0$.

Sind $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: f(D) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf D , so gilt

4. $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$ für alle $x \in D$.

Insbesondere ist damit gesagt, dass die Funktionen $f + g$, fg , f/g und $g \circ f$ auf ihrem gesamten Definitionsbereich differenzierbar sind.

Satz 19. Sei $(a_n)_{n=0}^\infty$ eine Folge in \mathbb{R} und $D \subseteq \mathbb{R}$ so, dass die Reihe $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ für alle $x \in D$ konvergiert. Dann ist die Funktion

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

db auf ganz D und es gilt

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$$

für alle $x \in D$.

Satz 20. Sei D zusammenhängend, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf D , streng monoton (steigend oder fallend) und in $x_0 \in D$ differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1}: f(D) \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar und es gilt

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Satz 21. (Mittelwertsatz) Sei $D = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf D . Dann gilt:

$$\exists \xi \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Definition 16. $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar auf D . f heißt im Punkt $x_0 \in D$ *zweimal* differenzierbar, falls die Ableitungsfunktion f' im Punkt x_0 differenzierbar ist. In diesem Fall heißt $f''(x_0) := (f')'(x_0)$ die *zweite* Ableitung von f im Punkt x_0 .

Ist f in jedem Punkt $x_0 \in D$ zweimal differenzierbar, so sagt man, f ist zweimal differenzierbar auf D und nennt $f'': D \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f''(x)$ die zweite Ableitung(sfunktion) von f .

Entsprechend definiert man $f''', f^{(4)}, f^{(5)}, \dots$

Satz 22. (Taylor) Sei $D = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in D$. Die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ sei $n + 1$ mal differenzierbar in 0 . Dann gilt:

$$\forall x \in D \setminus \{0\} \exists \xi \in D : f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

6 Anwendungen

Satz 23. (de l'Hospital) Seien $D \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in D, f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ db auf D . Es gelte

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0,$$

und der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiere. Dann existiert auch der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Definition 17. Seien $D \subseteq \mathbb{R}, f: D \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in D$.

1. x_0 heißt (globale) Minimalstelle [Maximalstelle], falls gilt:

$$\forall x \in D : f(x) \geq f(x_0) \quad [f(x) \leq f(x_0)]$$

2. x_0 heißt lokale Minimalstelle [Maximalstelle], falls gilt:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall x \in D \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) : f(x) \geq f(x_0) \quad [f(x) \leq f(x_0)]$$

3. x_0 heißt (lokale bzw. globale) Extremstelle, falls x_0 (lokale bzw. globale) Minimal- oder Maximalstelle ist.

Satz 24. Seien $D \subseteq \mathbb{R}, f: D \rightarrow \mathbb{R}$ db auf D . Weiter sei $x_0 \in D$ ein innerer Punkt von D , d.h. es gelte

$$\exists \varepsilon > 0 : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq D.$$

1. (notwendige Bedingung) Wenn x_0 eine Extremstelle ist, dann gilt $f'(x_0) = 0$.
2. (hinreichende Bedingung) Falls f im Punkt x_0 sogar n mal db ist und gilt

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \neq f^{(n)}(x_0),$$

so gilt:

- (a) Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) < 0$, so ist x_0 eine lokale Maximalstelle.
- (b) Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$, so ist x_0 eine lokale Minimalstelle.
- (c) Ist n ungerade, so ist x_0 keine Extremstelle.

7 Integration

Definition 18. Sei $[a, b] \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Ein Vektor $z = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ heißt *Zerlegung* des Intervalls $[a, b]$, falls gilt

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

2. Ein Vektor $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ heißt *Zwischenvektor* zu einer Zerlegung von $[a, b]$, falls gilt

$$a = x_0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2 < \dots < \xi_n < x_n = b.$$

3. Ist $z = (x_0, \dots, x_n)$ eine Zerlegung von $[a, b]$ und $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ein *Zwischenvektor* zu z , dann heißt

$$\sigma_f(z, \xi) := \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

die *Riemannsche Zwischensumme* von f bezüglich z und ξ .

4. f heißt *(Riemann-)integrierbar*, falls gilt

$$\exists s \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0$$

$$\exists z \text{ Zerlegung von } [a, b]$$

$$\forall \xi \text{ Zwischenvektor von } z : |\sigma_f(z, \xi) - s| < \varepsilon.$$

In diesem Fall heißt $\int_a^b f(x)dx := s$ das *Integral* von a bis b über $f(x)$ nach x , und man definiert weiter

$$\int_b^a f(x)dx := - \int_a^b f(x)dx \quad \text{und} \quad \int_c^c f(x)dx := 0 \quad (c \in [a, b]).$$

Satz 25. Sei $[a, b] \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf D . Dann ist f integrierbar über $[a, b]$.

Satz 26. Seien $[a, b] \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$ und $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei über $[a, b]$ integrierbare Funktionen. Dann gilt:

1. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ für jedes $c \in [a, b]$.
2. $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
3. $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ (Dreiecksungleichung für Integrale).
4. Falls $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, dann ist $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Satz 27. (Mittelwertsatz der Integralrechnung) Seien $[a, b] \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf D . Dann existiert eine Stelle $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$$

Definition 19. Seien $[a, b] \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Eine Funktion $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* von f falls gilt $F' = f$.

In diesem Fall schreibt man auch " $\int f(x)dx = F(x)$ " und nennt den Ausdruck auf der linken Seite das *unbestimmte Integral* von f nach x .

Satz 28. Seien $[a, b] \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Funktion

$$F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) := \int_a^x f(t) dt$$

eine Stammfunktion von f .

Satz 29. Sei $[a, b] \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$.

1. (Partielle Integration) $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ seien db, $[a, b] \subseteq D$. Dann gilt:

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

2. (Substitution) $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $g: f(D) \rightarrow \mathbb{R}$ seien db, $[a, b] \subseteq D$. Dann gilt:

$$\int_a^b g(f(x))f'(x)dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx$$

8 Gebirge

8.1 Stetigkeit

Definition 20. Zu $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ heißt

$$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

die *Norm* von x . Zu $x, y \in \mathbb{R}^n$ heißt $\|x - y\|$ der *Abstand* zwischen x und y .

Definition 21. Eine Folge $(x^{(k)})_{k=0}^\infty$ in \mathbb{R}^n ist eine Funktion $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k \mapsto x^{(k)}$.

Eine solche Folge in \mathbb{R}^n heißt *konvergent*, falls gilt:

$$\exists s \in \mathbb{R}^n \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} \forall k \geq k_0 : \|x^{(k)} - s\| < \varepsilon.$$

Dieses (dann eindeutig bestimmte) s heißt *Limes* von $(x^{(k)})_{k=0}^\infty$. Notation: $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = s$.

Satz 30. Sei $(x^{(k)})_{k=0}^\infty$ eine Folge in \mathbb{R}^n , etwa

$$x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \quad (k \geq 0).$$

Dann gilt: $(x^{(k)})_{k=0}^\infty$ konvergiert genau dann, wenn alle n Koordinatenfolgen $(x_1^{(k)})_{k=0}^\infty, (x_2^{(k)})_{k=0}^\infty, \dots, (x_n^{(k)})_{k=0}^\infty$ konvergieren. In diesem Fall gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_1^{(k)}, \lim_{k \rightarrow \infty} x_2^{(k)}, \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} x_n^{(k)} \right).$$

Definition 22. Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $\xi \in D$.

1. f heißt *konvergent* bei ξ , falls gilt

$$\exists y \in \mathbb{R} \forall (x^{(k)})_{k=0}^\infty \text{ in } D \setminus \{\xi\} : \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = \xi \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x^{(k)}) = y.$$

In diesem Fall heißt $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) := y$ der *Grenzwert* von f für x gegen ξ .

2. f heißt *stetig* in ξ , falls f bei ξ konvergiert und $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = f(\xi)$ gilt.
3. f heißt *stetig* auf D , falls f in jedem $\xi \in D$ stetig ist.

8.2 Differenzierbarkeit

Definition 23. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\xi \in D$.

1. f heißt *differenzierbar* im Punkt ξ in Richtung v , falls der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi + h \cdot v) - f(\xi)}{h} \quad (\in \mathbb{R})$$

existiert. In diesem Fall heißt der Grenzwert die *Richtungsableitung* von f in ξ bezüglich v und wird $\frac{\partial}{\partial v} f(\xi)$ geschrieben.

2. Ist $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ der i -te Einheitsvektor, dann schreibt man statt $\frac{\partial}{\partial e_i} f(\xi)$ auch $\frac{\partial}{\partial x_i} f(\xi)$ und spricht von der *partiellen Ableitung* nach x_i .
3. Existieren alle partiellen Ableitungen in ξ , so heißt f *partiell differenzierbar* in ξ und der Vektor

$$\nabla f(\xi) := \text{grad } f(\xi) := \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(\xi), \frac{\partial}{\partial x_2} f(\xi), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f(\xi) \right)$$

heißt der *Gradient* von f in ξ .

Definition 24. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $\xi \in D$. f heißt (total) *differenzierbar* in ξ , falls es einen Vektor $a \in \mathbb{R}^n$ gibt, so dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi) - a \cdot h}{\|h\|} = 0$$

ist. In diesem Fall heißt $f'(\xi) := a$ die (totale) *Ableitung* von f in ξ .

Satz 31. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $\xi \in D$, f total differenzierbar in ξ . Dann gilt:

1. f ist stetig in ξ
2. f ist partiell differenzierbar in ξ und es gilt:

$$f'(\xi) = \nabla f(\xi)$$

3. Für jedes $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ existiert die Richtungsableitung $\frac{\partial}{\partial v} f(\xi)$ und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial v} f(\xi) = f'(\xi) \cdot v$$

4. $\max \left\{ \frac{\partial}{\partial v} f(\xi) : v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1 \right\} = \|\nabla f(\xi)\|$

8.3 Extremwerte

Definition 25. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $\xi \in D$, ξ heißt *lokale Minimalstelle* [*Maximalstelle*] von f , falls gilt

$$\exists \varepsilon > 0 \forall x \in D : \|x - \xi\| < \varepsilon \Rightarrow f(x) \geq f(\xi) \quad [f(x) \leq f(\xi)].$$

ξ heißt *Extremstelle* von f , falls ξ lokale Minimal- oder Maximalstelle ist.

Satz 32. Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf D , ξ ein innerer Punkt von D , d.h.

$$\exists \varepsilon > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n : \|x - \xi\| < \varepsilon \Rightarrow x \in D.$$

Dann gilt: Wenn ξ eine Extremstelle von f ist, dann ist $\nabla f(\xi) = (0, \dots, 0)$.

Definition 26. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Ist f partiell differenzierbar auf D , so kann man die partiellen Ableitungen ihrerseits als Funktionen auffassen:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad \xi \mapsto \frac{\partial}{\partial x_i} f(\xi).$$

Wenn diese Funktionen (in $\xi \in D$ / auf D) partiell differenzierbar sind, so heißt f (in $\xi \in D$ / auf D) zweimal partiell differenzierbar und

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\xi) := \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f \right) (\xi)$$

heißt die *zweite partielle Ableitung* von f in ξ bzgl. x_i and x_j .

Satz 33. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar auf D , ξ ein innerer Punkt von D , in dem die zweiten Ableitungen von f stetig sind. Weiter sei

$$H := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} f(\xi) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} f(\xi) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_1} f(\xi) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_n} f(\xi) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

und es gelte $\nabla f(\xi) = (0, 0, \dots, 0)$.

1. Sind alle Eigenwerte von H positiv, dann ist ξ eine Minimalstelle von f .
2. Sind alle Eigenwerte von H negativ, dann ist ξ eine Maximalstelle von f .
3. Hat H sowohl positive als auch negative Eigenwerte, so ist ξ keine Extremstelle von f .

9 Volumen

Notation. Für zwei Vektoren $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir $a \leq b$, falls gilt $a_k \leq b_k$ für alle $k = 1, \dots, n$.

Definition 27. Seien $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $a \leq b$.

1. Die Menge

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R}^n : a \leq x \leq b\}$$

heißt *Kästchen* mit Randpunkten a, b .

$$|[a, b]| := \prod_{k=1}^n (b_k - a_k)$$

heißt der *Inhalt* von $[a, b]$.

2. Eine *Zerlegung* von $[a, b]$ ist ein n -Tupel $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$, wobei Z_i für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ eine Zerlegung des Intervalls $[a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R}$ im Sinn von Definition 18.1 ist, also etwa $Z_i = (x_{i,0}, x_{i,1}, \dots, x_{i,k_i}) \in \mathbb{R}^{k_i}$ mit

$$a_i = x_{i,0} < x_{i,1} < \dots < x_{i,k_i} = b_i.$$

Setze $I := \{(i_1, \dots, i_n) : 1 \leq i_1 \leq k_1, \dots, 1 \leq i_n \leq k_n\}$. Dann heißt

$$K_i := [(x_{1,i_1-1}, \dots, x_{n,i_n-1}), (x_{1,i_1}, \dots, x_{n,i_n})] \subseteq \mathbb{R}^n$$

das *Kästchen* von Z zum Index $i = (i_1, \dots, i_n) \in I$.

3. Sei $\Xi := \{\xi_i : i \in I\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Ξ heißt Menge von *Zwischenpunkten* für Z , falls $\xi_i \in K_i$ für alle $i \in I$.
4. Sei weiter $D \subseteq \mathbb{R}^n$ so, dass $[a, b] \subseteq D$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt

$$\sigma_f(Z, \Xi) := \sum_{i \in I} f(\xi_i) |K_i|$$

die *Riemannsche Zwischensumme* von f bezüglich Z und Ξ .

5. f heißt (*Riemann-*)*integrierbar* auf $[a, b]$, falls gilt

$$\begin{aligned} \exists s \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists Z \text{ Zerlegung von } [a, b] \\ \forall \Xi \text{ Menge von Zwischenpunkten für } Z : |\sigma_f(Z, \Xi) - s| < \varepsilon. \end{aligned}$$

In diesem Fall heißt

$$\int_{[a,b]} f(x) dx := s$$

das *Integral* von f über den Bereich $[a, b]$.

Satz 34. Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a \leq b$, $[a, b] \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\int_{[a,b]} f(x) dx = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n dx_{n-1} \cdots dx_1,$$

sofern das Integral auf der rechten Seite existiert.

Definition 28. 1. $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *beschränkt*, falls es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt so dass

$$D \subseteq [(-M, -M, \dots, -M), (M, M, \dots, M)].$$

2. Sei D beschränkt, M wie in Punkt 1, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und

$$\begin{aligned} \tilde{f}: [(-M, -M, \dots, -M), (M, M, \dots, M)] &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \tilde{f}(x) &:= \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in D \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Dann setzt man

$$\int_D f(x) dx := \int_{[(-M, -M, \dots, -M), (M, M, \dots, M)]} \tilde{f}(x) dx,$$

sofern das Integral auf der rechten Seite existiert.

3. Ist D beschränkt, so heißt

$$V(D) := \int_D 1 dx$$

das *Volumen* (bzw im Fall $n = 2$: der *Flächeninhalt*) von D .

Satz 35. (Substitutionsregel) Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $g_1, \dots, g_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar,

$$g: D \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad g(x) := (g_1(x), \dots, g_n(x))$$

injektiv und $f: g(D) \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Weiter sei

$$J: D \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, \quad J(x) := \begin{pmatrix} \nabla g_1(x) \\ \nabla g_2(x) \\ \vdots \\ \nabla g_n(x) \end{pmatrix}$$

und es gelte $J(x) \neq 0$ für alle $x \in D$. Dann gilt

$$\int_{g(D)} f(x) dx = \int_D f(g(x)) |\det J(x)| dx$$

10 Kurven

Definition 29. Eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *Kurve*.

Definition 30. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve.

1. f heißt *konvergent* in $t_0 \in [a, b]$, falls

$$\begin{aligned} \exists v \in \mathbb{R}^n \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t \in [a, b] \setminus \{t_0\}: \\ |t - t_0| < \delta \Rightarrow \|f(t) - v\| < \varepsilon \end{aligned}$$

In diesem Fall heißt das dann eindeutig bestimmte v der *Limes* von f bei t_0 . Notation: $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) := v$.

2. f heißt *stetig* in $t_0 \in [a, b]$, falls f bei t_0 konvergent ist und gilt $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0)$.
 f heißt *stetig*, wenn f in jedem Punkt $t_0 \in [a, b]$ stetig ist.

3. f heißt *differenzierbar* in $t_0 \in [a, b]$, falls

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

existiert. In diesem Fall heißt $f'(t_0) := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \in \mathbb{R}^n$ die Ableitung von f in t_0 .

f heißt *differenzierbar*, wenn f in jedem Punkt $t_0 \in [a, b]$ differenzierbar ist. In diesem Fall heißt $f': [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto f'(t)$ die *Ableitungskurve* von f .

Satz 36. Seien $f_1, \dots, f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$. Dann gilt:

1. f ist stetig in $t_0 \in [a, b]$
 \iff alle f_i sind stetig in t_0 .
2. f ist differenzierbar in $t_0 \in [a, b]$
 \iff alle f_i sind differenzierbar in t_0 .
In diesem Fall gilt $f'(t_0) = (f'_1(t_0), \dots, f'_n(t_0))$.

Definition 31. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve.

1. Ist $Z = (t_0, \dots, t_m)$ eine Zerlegung von $[a, b]$, so sei

$$L(f, Z) := \sum_{k=1}^m \|f(t_k) - f(t_{k-1})\|.$$

2. f heißt *messbar* (oder *rektifizierbar*), falls gilt:

$$\exists M \geq 0 \forall Z \text{ Zerl. von } [a, b] : L(f, Z) \leq M.$$

3. Ist f messbar, so heißt

$$L(f) := \sup\{L(f, Z) \mid Z \text{ Zerl. von } [a, b]\}$$

die *Länge* der Kurve f .

Satz 37. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar und f' stetig. Dann ist f messbar und es gilt

$$L(f) = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

11 Kurvenintegrale

Definition 32. Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine messbare Kurve, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ so, dass $\gamma([a, b]) \subseteq D$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

1. Sei $Z = (x_0, \dots, x_k)$ eine Zerlegung von $[a, b]$ und $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ ein zu Z passender Zwischenvektor. Dann heißt

$$\sigma_f^\gamma(Z, \xi) := \sum_{k=1}^n f(\gamma(\xi_k)) \|\gamma(x_k) - \gamma(x_{k-1})\|$$

die *Zwischensumme* von f für γ bezüglich Z und ξ .

2. f heißt *integrierbar* entlang γ , falls gilt:

$$\begin{aligned} \exists A \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists Z \text{ Zerl. von } [a, b] \\ \forall \xi \text{ passend zu } Z : |\sigma_f^\gamma(Z, \xi) - A| < \varepsilon. \end{aligned}$$

In diesem Fall heißt

$$\int_\gamma f(x) ds := A$$

das *Kurvenintegral* von f entlang γ .

Satz 38. Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine messbare und differenzierbare Kurve, γ' stetig, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ so, dass $\gamma([a, b]) \subseteq D$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt

$$\int_\gamma f(x) ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt,$$

sofern das Integral auf der rechten Seite existiert.