

Übungsblatt 1

Besprechung am 18.10.2012

Aufgabe 1 Beweisen Sie die folgenden Aussagen nur unter Verwendung der Körperaxiome aus Definition 1 im Skriptum.

- a) $1 > 0$
- b) $\forall x \in \mathbb{R} : (-1) \cdot x = -x$

Aufgabe 2 In Satz 1 der Vorlesung wurde die *Dreiecksungleichung*

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : |a + b| \leq |a| + |b|$$

vorgestellt und im Beweis von Satz 1(7) zu Hilfe genommen, ohne selbst bewiesen worden zu sein. Tun Sie dies nun! Können Sie die Namensgebung dieser Formel erklären?

Aufgabe 3 Übungen zur Prädikatenlogik:

- a) Übersetzen Sie die Aussage

Zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen liegt mindestens eine weitere.

in die Sprache der Prädikatenlogik! Vertauschen Sie nun die Reihenfolge der Quantoren \forall und \exists : ändert sich dadurch der Wahrheitsgehalt dieser Aussage?

- b) In der Definition der reellen Zahlen ist die (etwas unhandliche) prädikatenlogische Formel

$$\forall M \subseteq \mathbb{R}, M \neq \emptyset : (\exists S \in \mathbb{R} \forall x \in M : x \leq S) \implies \\ (\exists S_{\min} \in \mathbb{R} : (\forall x \in M : x \leq S_{\min}) \wedge (\forall S \in \mathbb{R} : (\forall x \in M : x \leq S) \implies S_{\min} \leq S))$$

aufgetaucht. Verneinen Sie diese Aussage; die Negation ist dabei bis in die innersten Komponenten der Formel zu ziehen! Verwenden Sie dazu $(A \implies B) \iff (\neg A \vee B)$ sowie die *De Morgan'schen Regeln* $\neg(A \vee B) \iff (\neg A \wedge \neg B)$, $(\neg \forall x : P(x)) \iff (\exists x : \neg P(x))$, usw.

Aufgabe 4 Zeigen Sie mit Hilfe des Beweisprinzips der *vollständigen Induktion*

$$(P(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N} : P(n) \implies P(n+1))) \implies (\forall n \in \mathbb{N} : P(n))$$

die folgenden Aussagen.

- a) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
- b) $\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R}, x \geq -1 : (1+x)^n \geq 1+n \cdot x$

Aufgabe 5 Verschaffen Sie sich Zugang zu einer lauffähigen Installation des Computeralgebrasystems Sage (<http://www.sagemath.org>). Machen Sie sich mit der Benutzeroberfläche, der Dokumentation und der Syntax von Sage vertraut!