

Aufgabe Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{e^x - 1 - x}$

Aufgabe Außer dem in der Vorlesung eingeführten Begriff der Stetigkeit gibt es noch weitere Möglichkeiten, Stetigkeit zu definieren. Zum Beispiel heißt eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ *Lipschitz-stetig*, falls gilt:

$$\exists L \in \mathbb{R} \forall x, y \in D : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Jede Lipschitz-stetige Funktion ist stetig im üblichen Sinn, aber nicht jede im üblichen Sinn stetige Funktion ist auch Lipschitz-stetig.

Zeigen Sie: Die Funktion $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist Lipschitz-stetig. (Hinweis: Eine mögliche Wahl für L ist $L = 2$.)

Aufgabe Sei $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin(x) + \cos(x)$. Berechnen Sie alle Maximal- und Minimalstellen von f .

Aufgabe Berechnen Sie das Integral $\int_0^\pi x \sin(x) dx$.

Aufgabe Untersuchen Sie, ob die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{x e^y}{|x| + y^2}$$

im Punkt $(0, 0)$ konvergiert.

Aufgabe Berechnen Sie für die Funktion f aus der vorherigen Aufgabe den Gradient im Punkt $(1, 1)$.

Aufgabe Sei $D = [0, 1] \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$. Berechnen Sie das Volumenintegral $\int_D f(x, y) d(x, y)$.

Aufgabe Sei f wie in der vorherigen Aufgabe und

$$\gamma: [0, \frac{1}{2}\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\sin(t), \cos(t)).$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\gamma} f(x, y) ds$.

Aufgabe

1. Berechnen Sie die Länge der Kurve

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = (19 + 2t + t^2, 3 - 4t - 2t^2, 1 + 4t + 2t^2).$$

2. Wie lautet die Kurve, die die gleichen Punkte wie γ aus (a) durchläuft, aber mit doppelter Geschwindigkeit?

3. Wie lautet die Kurve, die die gleichen Punkte wie γ aus (a) durchläuft, aber in umgekehrter Richtung?