

# Übungsblatt 4

<http://www.risc.uni-linz.ac.at/education/courses/ws2009/mathematik2>

Besprechung am 5.11.2009.

---

**Aufgabe 1** Die reelle Folge  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  sei rekursiv gegeben durch

$$a_0 := 3, \quad a_n := \frac{1}{2} \left( a_{n-1} + \frac{5}{a_{n-1}} \right) \quad (n \geq 1).$$

Zeigen Sie, dass  $a$  konvergiert und bestimmen Sie  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

**Aufgabe 2** Untersuchen Sie die folgenden Reihen mit Hilfe des Majoranten/Minoranten-Kriteriums auf Konvergenz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3+k^2}{k^4}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4k^2-1}.$$

**Aufgabe 3** Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Reihen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k k!}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(k+3)}.$$

**Aufgabe 4** Zeigen Sie, dass die Dirichletsche Sprungfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \text{ rational ist,} \\ 0, & \text{wenn } x \text{ irrational ist,} \end{cases}$$

in keinem Punkt  $x \in \mathbb{R}$  stetig ist.

**Aufgabe 5** Die  $n$ ten Wurzeln  $\rho_k$ ,  $0 \leq k \leq n-1$ , einer komplexen Zahl  $w = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  sind gegeben durch

$$\rho_k = \sqrt[n]{r} \left( \cos \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right), \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Implementieren Sie ein Programm in Sage, das zu einer gegebenen Zahl  $w = a + ib \in \mathbb{C}$  und einer natürlichen Zahl  $n$  die komplexen Wurzeln  $\sqrt[n]{w}$  berechnet und in der komplexen Zahlenebene visualisiert.