

Übungsblatt 3

<http://www.risc.uni-linz.ac.at/education/courses/ws2009/mathematik2>

Besprechung am **29.10.2009**.

Aufgabe 1 Untersuchen Sie, ob diese Folgen konvergieren oder nicht, und geben Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert an:

$$\begin{aligned} a_n &= n - \frac{1}{n}, & b_n &= \frac{2n}{2n+1} - \frac{2n+1}{2n}, & c_n &= \cos(n\pi) \\ d_n &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{n}\right)^n, & e_n &= n - \frac{(n+1)^2}{n}, & f_n &= \frac{1}{2}(e^n - e^{-n}). \end{aligned}$$

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass die Folge $a_n = n^2/(n^2 + 4)$ gegen 1 konvergiert, indem Sie zu gegebenem $\epsilon > 0$ ein $n(\epsilon)$ angeben, sodass $|a_n - 1| < \epsilon$ ist, für alle $n > n(\epsilon)$.

Aufgabe 3 Untersuchen Sie ob die Funktion $f(x) = x^2$ auf den gegebenen Definitions- und Bildbereichen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind:

(a) $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ (b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ (c) $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ (d) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Aufgabe 4 Beweisen Sie, dass

- (a) die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ stetig ist.
- (b) wenn $f : X \rightarrow Y$ konvex ist und $g : Y \rightarrow Z$ konvex und monoton wachsend ist, dann ist die Hintereinanderausführung $h := g \circ f : X \rightarrow Z$ konvex. (Eine Funktion $f : X \rightarrow Y$ ist konvex genau dann, wenn für jedes $x, y \in X$ und alle $0 \leq \alpha \leq 1$ gilt: $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$.)

Aufgabe 5 Eine Möglichkeit, eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ im Rechner darzustellen, ist die Angabe eines Intervalls $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ ($b \geq a$) und $x \in [a, b]$. Je kleiner dabei die Länge $\epsilon := b - a$ des Intervalls ist, desto genauer ist x beschrieben.

Schreiben Sie eine Funktion in Sage, die zu gegebenem $c \in \mathbb{Q}$ mit $c > 0$ und $\epsilon \in \mathbb{Q}$ mit $\epsilon > 0$ zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $0 \leq b - a \leq \epsilon$ und $\sqrt[3]{c} \in [a, b]$ berechnet. (Als arithmetische Operationen sind dabei nur die Grundrechenarten zu verwenden.)