Übungen zu Linearer Algebra und Analytischer Geometrie II
9.Übungsblatt, auszuarbeiten für 21.5.2007

63. Seien g und f Endomorphismen eines Vektorraums V über dem Körper K. Zeigen Sie: λ ist Eigenwert von $f \circ g \Rightarrow \lambda$ ist Eigenwert von $g \circ f$

64. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper K und f ein nilpotenter Vektorraumendomorphismus. Zeigen Sie:

    f ist diagonalisierbar $\Rightarrow f$ ist die Nullabbildung

65. Sei A eine nilpotente $n \times n$ Matrix über dem Körper K.

    (a) Zeigen Sie: $Spur(A) = 0$
    Gilt auch die Umkehrung?

    (b) Zeigen Sie: Für den Nilpotenzgrad k von A, also jenes kleinste k sodass $A^k = 0$, gilt: $k \leq n$

66. Sei $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3_3$ und h die von A induzierte lineare Abbildung $x \mapsto A \cdot x$ auf $\mathbb{R}^3$.

    (a) Zerlege $\mathbb{R}^3$ in h-invariante Unterräume.

    (b) Finde eine Basis B von $\mathbb{R}^3$, sodass $A(h, B, B)$ Blockdiagonalform hat.

    (c) Ist A diagonalisierbar über $\mathbb{R}$ bzw. über $\mathbb{C}$? Begründen Sie ihre Antwort, eine Diagonalisierung braucht nicht ausgeführt zu werden.

67. Sei Sei $A := \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 2 & -7 & -1 \\ 4 & -2 & -7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3_3$.

    (a) Finden Sie eine Matrix D in Dreiecksgestalt zu der A ähnlich ist und bestimmen Sie eine Matrix B, sodass $D = B^{-1} \cdot A \cdot B$.

    (b) Sei f die von A induzierte lineare Abbildung. Berechnen Sie die Jordan Zerlegung $f = g + h$ und geben Sie die Abbildungsvorschriften für g und h explizit an. Bestimmen Sie weiters den Nilpotenzgrad des nilpotenten Summanden.

Bei den folgenden Beispielen sind Nebenrechnungen mit einem Computeralgebraprogramm erlaubt!

68. Bestimmen Sie eine Jordan ‘sche Normalform für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3^3$$

.

69. Bestimmen Sie eine Matrix B für A aus Beispiel 68, sodass $B^{-1} \cdot A \cdot B$ in Jordan ‘scher Normalform ist.

70. Bestimmen Sie eine Jordan ‘sche Normalform für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3^3$$

.

71. Bestimmen Sie eine Matrix B für A aus Beispiel 70, sodass $B^{-1} \cdot A \cdot B$ in Jordan ‘scher Normalform ist.