7 Determinanten

Im folgenden betrachten wir quadratische Matrizen. Wir schreiben dabei eine $n \times n$ Matrix A (über dem Körper K) primär als Zeilenvektor, dessen Elemente die Spalten von A sind; also

$$A = (a_1, \dots, a_n),$$

wobei a_i die i-te Spalte der Matrix A ist. Für solche quadratische Matrizen A werden wir eine Abbildung in den Grundkörper K angeben, die Determinante von A, welche ein Kriterium für die Singularität (also Nichtinvertierbarkeit) von A darstellt.

Definition 7.1: *Sei D eine Abbildung von quadratischen Matrizen der Dimension n in den Grundkörper, also*

$$D : \mathrm{Mat}_{n\times n}(K) \longrightarrow K \ .$$

Wir fassen D auf als Funktion der Spalten der Matrix A, also $D(A) = D(a_1, \dots, a_n)$. Im folgenden sind i, j immer Spaltenindizes, also $i, j \in \{1, \dots, n\}$.
D ist **multilinear**, *g.d.w. für alle i, j und alle $\lambda \in K$ gilt:*
(D1) $D(\dots, b_i + c_i, \dots) = D(\dots, b_i, \dots) + D(\dots, c_i, \dots)$, und
(D2) $D(\dots, \lambda a_i, \dots) = \lambda D(\dots, a_i, \dots)$.
D ist **alternierend** *g.d.w. für alle $i \neq j$ gilt:*
(D3) $D(\dots, a_i, \dots, a_j, \dots) = -D(\dots, a_j, \dots, a_i, \dots)$.
D ist **identitätserkennend** *g.d.w.*
(D3') $D(A) = 0$ falls A zwei identische Spalten hat.
D ist **1-erhaltend** *g.d.w.*
(D4) $D(I_n) = 1$.

D heisst eine **Determinantenfunktion** *g.d.w. D multilinear, alternierend und 1-erhaltend ist; also wenn D die Eigenschaften (D1), (D2), (D3) und (D4) besitzt.*

Satz 7.2: *Eine Abbildung $D : \mathrm{Mat}_{n\times n}(K) \to K$ ist eine Determinantenfunktion g.d.w. sie die Eigenschaften (D1), (D2), (D3') und (D4) besitzt.*

Satz 7.3: *Sei $D : \mathrm{Mat}_{n\times n}(K) \to K$ eine Determinantenfunktion. Wenn die Spalten von A linear abhängig sind, so ist $D(A) = 0$.*

Satz 7.4: *Sei $D_2 : \mathrm{Mat}_{2\times 2}(K) \to K$ die folgende Abbildung von 2×2 Matrizen in den Grundkörper:*

$$\begin{array}{rccc} D_2 : & \mathrm{Mat}_{2\times 2}(K) & \longrightarrow & K \\ & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} & \mapsto & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \ . \end{array}$$

Dann ist diese Funktion D_2 die einzige Determinantenfunktion auf 2×2 Matrizen.

Im folgenden wollen wir nun für beliebige Dimension zeigen, dass es genau eine Determinantenfunktion gibt. Dass dies für 1×1 Matrizen (a) gilt, ist klar. Die eindeutig bestimmte Determinantenfunktion ist $D_1(a) = a$.

Satz 7.5: *Sei $n \geq 3$ und sei $D : \mathrm{Mat}_{(n-1)\times(n-1)}(K) \to K$ eine Determinantenfunktion. Für eine $n \times n$ Matrix A bezeichne A_{ij} die Matrix, welche aus A entsteht durch Streichung der i-ten Zeile und j-ten Spalte. Dann ist für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ die Funktion*

$$\begin{array}{rccc} f_i : & \mathrm{Mat}_{n\times n}(K) & \longrightarrow & K \\ & A & \mapsto & \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D(A_{ij}) \end{array}$$

eine Determinantenfunktion. Es gibt also für jede Dimension von Matrizen eine Determinantenfunktion.

Beispiel 7.6: Wir gehen aus von der Determinantenfunktion D_2 auf 2×2 Matrizen. So wie im Satz 7.5 ergeben sich daraus die Determinantenfunktionen f_i auf 3×3 Matrizen wie folgt:

$$f_1 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \;=$$

$$a_{11} \cdot D_2 \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \cdot D_2 \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} a_{13} \cdot D_2 \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \;=$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \;=$$

$$f_2 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \;=\; f_3 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \;.$$

Wir sehen, dass man den eindeutig bestimmten Wert der Determinantenfunktionen f_i auf 3×3 Matrizen wie folgt nach der sogenannten **Regel von Sarrus** bestimmen kann: man bildet die 3 Produkte der Parallelen zur Diagonale, sowie die negativen Werte der 3 Produkte der Parallelen zur Antidiagonale, und summiert diese 6 Summanden auf. □

Um die Eindeutigkeit der Determinatenfunktion für beliebiges n nachzuweisen, gehen wir zunächst einen Umweg. Wir untersuchen gewisse Eigenschaften von Permutationen (also Bijektionen) auf endlichen Mengen. Vergleiche dazu Beispiel 1.5.6(6).

Definition 7.7: *Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine* **Permutation** *auf der Menge $\{1, \ldots, n\}$ ist eine Bijektion auf dieser Menge. Wir schreiben üblicherweise eine Permutation σ als*

$$\sigma \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \;.$$

Die **Menge der Permutationen** *auf $\{1, \ldots, n\}$ bezeichnen wir mit P_n.*
Die Hintereinanderausführung auf P_n nennen wir auch **Produkt**.
Eine **Transposition** *auf $\{1, \ldots, n\}$ ist eine Permutation τ, welche zwei Elemente i und j $(i \neq j)$ vertauscht, und alle anderen Elemente fix lässt; in Zeichen $\tau : i \leftrightarrow j$.*
Ist $\sigma \in P_n$, so heisst ein Paar (i, j) **Fehlstelle** *von σ, wenn gilt: $i < j$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$.*
Hat $\sigma \in P_n$ genau $f(\sigma)$ Fehlstellen, so heisst $(-1)^{f(\sigma)}$ die **Signatur** *von σ, in Zeichen* $\operatorname{sign}(\sigma)$.

Wie wir schon in Kapitel 1.5 gesehen haben, bildet P_n mit der Hintereinanderausführung von Funktionen, also dem Produkt, eine (nicht-abelsche) Gruppe.

Beispiel 7.8: Für $n = 0$ gibt es offensichtlich nur eine Permutation; ebenso für $n = 1$. Wir betrachten die Permutationen in P_6:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \;.$$

Als Verknüpfungsergebnisse erhalten wir

$$\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} .$$

σ hat die 5 Fehlstellen $(2,3), (2,4), (2,5), (3,5), (4,5)$, also $\operatorname{sign}(\sigma) = (-1)^5 = -1$. □

Satz 7.9: *Jede Permutation $\sigma \in P_n$ kann ausgedrückt werden als Produkt von Transpositionen.*

Satz 7.10: *Für $\sigma, \tau \in P_n$ gilt $\operatorname{sign}(\tau \circ \sigma) = \operatorname{sign}(\tau) \cdot \operatorname{sign}\sigma$. Insbesondere gilt $\operatorname{sign}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sign}(\sigma)$.*

Defintion 7.11: *Eine Permutation σ heisst* **gerade**, *wenn $\operatorname{sign}(\sigma) = 1$, und* **ungerade**, *wenn $\operatorname{sign}(\sigma) = -1$.*

Satz 7.12: *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine eindeutig bestimmte Determinantenfunktion $D_n : \mathrm{Mat}_{n \times n}(K) \to K$, welche beschrieben werden kann als*

$$D_n(A) = \sum_{\sigma \in P_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} .$$

Aus Satz 7.12 sehen wir auch, dass die in Satz 7.5 eingeführten Determinatenfunktionen f_i unabhängig von i sind, also allesamt dasselbe Ergebnis liefern.

Definition 7.13: *Die laut Satz 7.12 eindeutig bestimmte Determinantenfunktion auf $\mathrm{Mat}_{n \times n}(K)$ bezeichnen wir mit* det. *Für eine $n \times n$ Matrix $A = (a_{ij})$ heisst*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in P_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

die **Determinante** *von A. Wir schreiben die Determinante auch als $\det(A) = |a_{ij}|$.*
Die Darstellung der Determinante $\det(A)$ wie in Satz 7.5, also

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

*heisst die (***Laplace-***)* **Entwicklung von** $\det(A)$ **nach der *i*-ten Zeile**. (P.S. Laplace, 1719–1790)

Satz 7.14: *Für eine quadratische Matrix A gilt: $\det(A) = \det(A^T)$.*

Korollar: *Für jeden Spaltenindex j gilt auch eine Entwicklung von $\det(A)$ nach der j-ten Spalte, also*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) .$$

Korollar: *Die Eigenschaften (D1), (D2), (D3), (D3') und (D4) der Determinantenfunktion gelten nicht nur für Spalten, sondern auch für Zeilen.*

Beispiel 7.15: Ist A eine quadratische Matrix in oberer Dreiecksform, also $a_{ij} = 0$ für alle $i > j$, so ist $\det(A) = |A|$ besonders einfach zu bestimmen, nämlich als das Produkt der Diagonalelemente

$$|A| \;=\; \prod_{i=1}^{n} a_{ii}\ .$$

Das sieht man aus der Spaltenentwicklung von $|A|$.
Dasselbe gilt für untere Dreiecksmatrizen wegen der Zeilenentwicklung von $|A|$. $\square$

Beispiel 7.16: Für $a_1, \dots, a_n \in K$ betrachten wir die Matrix

$$A_n(a_1, \dots, a_n) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

bzw. ihre Determinate

$$V_n(a_1, \dots, a_n) \;:=\; \det(A_n)\ .$$

Man nennt $V_n(a_1, \dots, a_n)$ die **Vandermonde Determinante** für $a_1, \dots, a_n$.
Sind etwa $a_i = a_j$ für $i \neq j$, so hat $A_n(a_1, \dots, a_n)$ zwei identische Zeilen und ist also wegen (D3') gleich 0.
Allgemein zeigen wir:

$$V_n(a_1, \dots, a_n) \;=\; \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)\ . \qquad (*)$$

Dazu gehen wir induktiv nach n vor. Für $n = 1$ gilt $(*)$ offensichtlich. Sei also nun $n > 1$. Wir multiplizieren für $j = n-1, \dots, 1$ die j-te Spalte mit a_1 und subtrahieren sie von der $(j+1)$-ten Spalte. Dabei verändert sich wegen (D1) und (D2) die Determinante nicht. Anschliessend ziehen wir jeweils aus der i-ten Zeile (für $i > 1$) den Faktor $a_i - a_1$ heraus. Auch dabei verändert sich wegen (D2) für Zeilen die Determinante nicht. Schliesslich entwickeln wir die Determinante nach der ersten Zeile. Wir erhalten also

$$\det(V_n(a_1, \dots, a_n) \;=\; \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & \cdots & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n - a_1 & \cdots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix} \;=\; \prod_{i=2}^{n} (a_i - a_1) V_{n-1}(a_2, \dots, a_n)\ .$$

Mit der Induktionshypothese ergibt sich daraus die Behauptung $(*)$.

Wir berechnen $V_4(1, 2, 3, 4)$ mittels Maple:

```
> with(LinearAlgebra);
> A4 := Matrix([[1,a1,a1^2,a1^3], [1,a2,a2^2,a2^3], [1,a3,a3^2,a3^3],
>                   [1,a4,a4^2,a4^3]]);
```

$$A4 := \begin{bmatrix} 1 & a1 & a1^2 & a1^3 \\ 1 & a2 & a2^2 & a2^3 \\ 1 & a3 & a3^2 & a3^3 \\ 1 & a4 & a4^2 & a4^3 \end{bmatrix}$$

> **V4 := Determinant(A4):**
> **factor(V4);**

$$(-a4+a3)(a2-a4)(a2-a3)(-a4+a1)(a1-a3)(a1-a2)$$

> **A4one := subs({a1=1,a2=2,a3=3,a4=4},A4);**

$$A4one := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{bmatrix}$$

> **V4one := Determinant(A4one):**

$$V4one := 12$$

Wir führen auch einige der oben beschriebenen Spaltenoperationen explizit aus:
> **M := A4;**

$$M := \begin{bmatrix} 1 & a1 & a1^2 & a1^3 \\ 1 & a2 & a2^2 & a2^3 \\ 1 & a3 & a3^2 & a3^3 \\ 1 & a4 & a4^2 & a4^3 \end{bmatrix}$$

> **M := ColumnOperation(M,[4,3],-a1);**

$$M := \begin{bmatrix} 1 & a1 & a1^2 & 0 \\ 1 & a2 & a2^2 & a2^3 - a1a2^2 \\ 1 & a3 & a3^2 & a3^3 - a1a3^2 \\ 1 & a4 & a4^2 & a4^3 - a1a4^2 \end{bmatrix}$$

> **M := ColumnOperation(M,[3,2],-a1);**

$$M := \begin{bmatrix} 1 & a1 & 0 & 0 \\ 1 & a2 & a2^2 - a1a2 & a2^3 - a1a2^2 \\ 1 & a3 & a3^2 - a1a3 & a3^3 - a1a3^2 \\ 1 & a4 & a4^2 - a1a4 & a4^3 - a1a4^2 \end{bmatrix}$$

> **M := ColumnOperation(M,[2,1],-a1);**

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a2 - a1 & a2^2 - a1a2 & a2^3 - a1a2^2 \\ 1 & a3 - a1 & a3^2 - a1a3 & a3^3 - a1a3^2 \\ 1 & a4 - a1 & a4^2 - a1a4 & a4^3 - a1a4^2 \end{bmatrix}$$

Entwickelt man die Determinante dieser Matrix nach der ersten Zeile, so ergibt sich offensichtlich

$$V_4(a_1, a_2, a_3, a_4) \;=\; (a_4 - a_1)(a_3 - a_1)(a_2 - a_1)V_3(a_2, a_3, a_4)\ ,$$

in Übereinstimmung mit obigem Induktionsbeweis. □

Die Determinantenfunktion ist multiplikativ; das sehen wir im folgenden Satz.

Satz 7.17: *Für $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ gilt:*

$$|A \cdot B| \;=\; |A| \cdot |B| \;.$$

Korollar: *Ist A invertierbar, dann gilt $|A| \neq 0$ und $|A^{-1}| = 1/|A|$.*

Wir wollen nun zeigen, dass dieses Korollar auch umkehrbar ist, also $|A| \neq 0$ eine Charakterisierung regulärer (invertierbarer) Matrizen ist. Dazu führen wir den Begriff der adjungierten Matrix ein. Wir erinnern daran, dass A_{ij} die Matrix bezeichnet, welche wir aus A erhalten durch Streichung der i-ten Zeile und j-ten Spalte.

Definition 7.18: *Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$. Dann ist die* **adjungierte Matrix** *bzw.* **Adjungierte** *von A, in Zeichen* $\mathrm{adj}(A)$*, diejenige $n \times n$ Matrix, deren Element in der i-ten Zeile und j-ten Spalte*

$$(-1)^{i+j}|A_{ji}|$$

ist.

Man beachte die Umkehrung der Indizes in Definition 7.18

Satz 7.19: *Für jede quadratische Matrix gilt* $(\mathrm{adj}(A))^T = \mathrm{adj}(A^T)$.

Satz 7.20: *Für jede $n \times n$ Matrix A gilt:*

$$A \cdot \mathrm{adj}(A) \;=\; |A| \cdot I_n \;=\; \mathrm{adj}(A) \cdot A \;.$$

Satz 7.21: *Eine quadratische Matrix A ist invertierbar g.d.w. $|A| \neq 0$; in diesem Fall ist*

$$A^{-1} \;=\; \frac{1}{|A|}\mathrm{adj}(A) \;.$$

Determinanten und lineare Gleichungssysteme

Mittels Determinanten können wir für ein SLG $Ax = b$ mit regulärer quadratischer Matrix A eine Lösungsformel angeben. Diese Formel heisst die **Cramersche Regel** (Gabriel Cramer, 1704–1752).

Satz 7.22: *Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ mit $|A| \neq 0$, und sei b ein Spaltenvektor über K der Länge n. Seien $a_1, \ldots, a_n$ die Spalten von A, also $A = (a_1, \ldots, a_n)$. Dann können die Komponenten x_i der eindeutigen Lösung von $Ax = b$ ausgedrückt werden als*

$$x_i \;=\; \frac{|a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n|}{|A|} \;.$$

Beispiel 7.23: Wir betrachten das SLG aus Beispiel 3.1, also

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 23 \end{pmatrix} \quad ,$$

welches die eindeutig bestimmte Lösung $x = (12, 5, -2)^T$ besitzt.
Als Determinante der Koeffizientenmatrix erhalten wir $|A| = 10$.
Ersetzen wir die erste Spalte von A durch die rechte Seite b, so ist die Determinante dieser Matrix 120.
Somit ergibt sich nach der Cramerschen Regel $x_1 = 120/10 = 12$. □