Übungsblatt 11

Besprechung am **22.06.2007**.

Aufgabe 1 Eine Parameterdarstellung der Kardioide (Herzlinie) ist

$$x(t) = 2\cos t - \cos 2t$$
$$y(t) = 2\sin t - \sin 2t$$

für $0 \leq t \leq 2\pi$.

a) Ermitteln Sie die Punkte mit horizontaler Tangente ($\dot{x}(t) \neq 0$, $\dot{y}(t) = 0$), mit vertikaler Tangente ($\dot{x}(t) = 0$, $\dot{y}(t) \neq 0$) und die singulären Punkte ($\dot{x}(t) = 0$, $\dot{y}(t) = 0$).

b) Zeigen Sie, dass im Punkt $t = 0$ für den Winkel $\varphi(t)$ des Tangentenvektors mit der positiven x-Achse gilt:

$$\lim_{t\to 0} \tan\varphi(t) = \lim_{t\to 0} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = 0.$$

Aufgabe 2 Algebraische Kurven.

a) Finden Sie heraus, um welches geometrische Gebilde es sich bei der Nullstellenmenge des Polynoms $f(x, y) = y^2 - x(x^2 - 1)$ handelt, d.h. skizzieren Sie die Menge der Punkte

$$V(f) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } f(a, b) = 0\}.$$

b) Können Sie die Nullstellenmenge als stetige Kurve parametrisieren (zum Beispiel mit Wurzelfunktionen und Fallunterscheidungen)?

Aufgabe 3 Raumkurven.

a) Rechnen Sie nach, dass die Kurve

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 2\sin\frac{t}{2} \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 4\pi$$

die Schnittlinie des Drehzylinders $x^2 + y^2 = 1$ mit der Kugel $(x + 1)^2 + y^2 + z^2 = 4$ ist.
Hinweis: $\sin^2\frac{t}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos t)$.

b) Skizzieren Sie die Kurve und berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor und Tangentenvektor.

Aufgabe 4 Der Krümmungskreis in einem Kurvenpunkt einer differenzierbaren Kurve ist jener Kreis, der dieselbe Tangente und dieselbe Krümmung besitzt. Zeigen Sie, dass der Krümmungskreis einer Kurve

$$t \mapsto \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

im Kurvenpunkt $(x(t), y(t))$ den Radius

$$r(t) = \frac{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{3/2}}{|\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{y}(t)\dot{x}(t)|}$$

hat und sein Mittelpunkt $(\xi(t), \eta(t))$ mit

$$\xi(t) = x(t) - \dot{y}(t)\frac{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{y}(t)\dot{x}(t)}, \quad \eta(t) = y(t) + \dot{x}(t)\frac{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{y}(t)\dot{x}(t)}$$

ist.

Aufgabe 5 Schreiben Sie eine Maxima-Prozedur, die den Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{x}}(t)$, den Tangentenvektor $\mathbf{T}(t)$, den Normalvektor $\mathbf{N}(t)$, die Bogenlänge L und die Krümmung $\kappa(t)$ einer zweimal stetig differenzierbaren Kurve symbolisch berechnet, und die Kurve plottet. Die Kurve soll durch eine Parametrisierung `[x(t),y(t)]` mit `t` im Intervall `[a,b]` gegeben sein.

Ihre Lösung zu dieser Aufgabe geben Sie bitte bis zum 21.06.2007 per E-Mail ab.

Aufgabe 6 Hyperbelfunktionen.

a) Zeigen Sie, dass für Hyperbelfunktionen Sinus hyperbolicus und Cosinus hyperbolicus die Identität

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

gilt, und begründen Sie damit die Namensgebung der Funktionen.

b) Rechnen Sie nach, dass für die Ableitungen

$$(\sinh t)' = \cosh t \quad \text{und} \quad (\cosh t)' = \sinh t$$

gilt.

c) Berechnen Sie die Krümmung $\kappa(t)$ des Hyperbelastes

$$\begin{aligned} x(t) &= \cosh t, \\ y(t) &= \sinh t, \end{aligned} \qquad -\infty < t < \infty$$

und skizzieren Sie die Kurve.

Die Lösung zu dieser Aufgabe können Sie schriftlich ausarbeiten und in der nächsten Übungsstunde zur Bewertung abgeben.