Name: ....

Matr.Nr.: ....

Stud.Kennz.: ....

Klausur
"Lineare Algebra und Analytische Geometrie II" (326001)
28.6.2007

Bitte folgendes beachten:

- *Schriftliche Unterlagen sowie elektronische Geräte dürfen NICHT zur Klausur verwendet werden.*
- *Tragen Sie – noch bevor Sie zu arbeiten beginnen — auf dem Angabenblatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Studienkennzahl ein. Schreiben Sie auf jedes Blatt, das Sie verwenden, links oben Ihren Namen.*
- *Geben Sie das ausgefüllte Angabenblatt zusammen mit Ihren Lösungen ab. Sie finden das Angabenblatt demnächst im Netz.*
- *Verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt (oder mehrere), und geben Sie Ihre Lösungen nach Aufgabennummern geordnet ab, also beginnend mit der ersten Aufgabe.*

---

(1) Sei V ein Vektorraum über K (K ist $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Beschreiben Sie:
  (a) Welche Eigenschaften muss eine Abbildung $\langle .|. \rangle : V^2 \to K$ haben, damit wir sie ein inneres Produkt auf V nennen?
  (b) Wie erhalten wir aus einem inneren Produkt eine Norm?
  (c) Wie lauten die Cauchy-Schwarz-Ungleichung und die Dreiecksungleichung?

(2) Sei $\langle .|. \rangle$ ein inneres Produkt auf dem Vektorraum V, und sei $||.||$ die von $\langle .|. \rangle$ induzierte Norm. Beweisen Sie: *Für alle $x, y \in V$ gilt:* $|\langle x|y \rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$.

(3) Sei V der Vektorraum der $n \times n$ Matrizen über $\mathbb{R}$. Seien

$$\langle A|B \rangle_1 = \mathrm{spur}(B^T A) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}, \qquad \langle A|B \rangle_2 = \mathrm{spur}(AB) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ji}.$$

  (a) Ist $\langle A|B \rangle_1$ ein Skalarprodukt auf V?
  (b) Ist $\langle A|B \rangle_2$ ein Skalarprodukt auf V?
  Begründen Sie Ihre Antwort.

(4) Bestimmen Sie eine maximale Menge linear unabhängiger Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(5) (a) Was versteht man unter dem Minimalpolynom einer quadratischen Matrix A über dem Körper K?

(b) Bestimmen Sie das Minimalpolynom der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(6) Bestimmen Sie mithilfe des Gram-Schmidt Orthonormalisierungsprozesses eine orthonormale Basis des von den beiden Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Teilraumes von $V = \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ mit dem Skalarprodukt $\langle A|B\rangle_1$ aus Aufgabe (3).

(7) Welche Normalformen von Matrizen kennen Sie, und wie hängen diese zusammen?